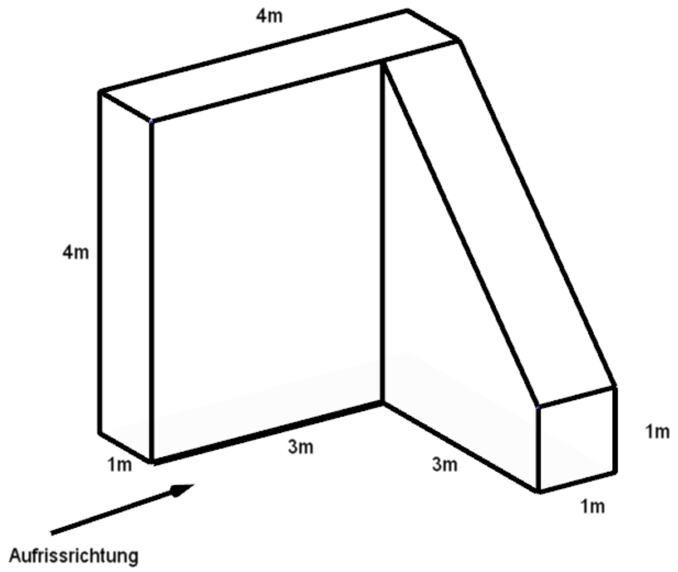
Abschlussprüfung 2021 - Mathematik schriftlich

Klassen F3a, F3b, F3c, F3d

Prüfungsdauer:	3 Stunden
Punktetotal:	55 Punkte
Erlaubte Hilfsmittel:	Von Ihren Lehrpersonen zugelassene Taschenrechner und Formelsammlungen
Bemerkungen:	Beginnen Sie **jede Aufgabe** auf einem **neuen Blatt**. Alle Lösungswege müssen nachvollziehbar sein. Alle Zwischenergebnisse sind so genau wie möglich weiter zu verwenden. **Endergebnisse** sind auf **zwei Stellen nach dem Komma** zu runden.

Aufgabe 1: Raum (8 Punkte)

In der folgenden Abbildung sehen Sie eine geplante Betonstütze.



(a) Zeichnen Sie Grund-, Auf- und Seitenriss dieses Körpers in die Vorlage auf Seite 8 ein. (3 P.)

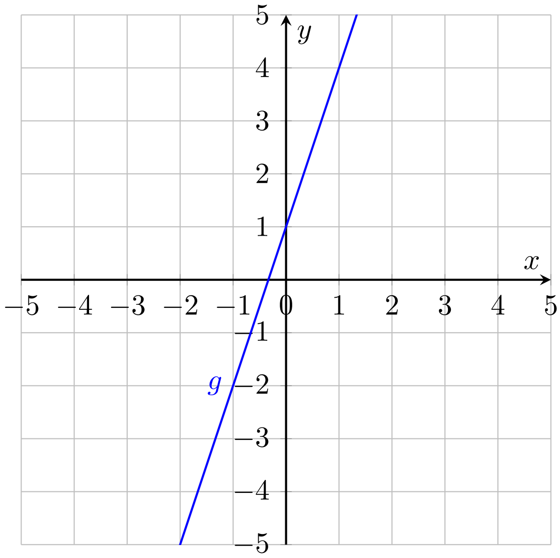
(b) Berechnen Sie die Betonmenge, die zur Herstellung einer Betonstütze benötigt wird. (3 P.)

(c) Der Bauherr möchte die Oberfläche mit einer Schutzlasur versehen. Wie viele Quadratmeter Fläche sind zu bemalen? (Die Bodenfläche wird selbstverständlich nicht lasiert.) (2 P.)

Aufgabe 2: Lineares (7 Punkte)

(a) Lineare Funktionen

i. In dem folgenden Koordinatensystem ist ein Ausschnitt der Geraden g dargestellt. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g durch Ablesen. (1 P.)



Hinweis: Falls Sie diese Teilaufgabe nicht lösen können, rechnen Sie bitte mit der (falschen) Lösung $y = 4x - 1$ für die Gerade g weiter.

ii. Die Punkte $A(12.5|y)$ und $B(x|-6.5)$ liegen auf der Geraden g. Berechnen Sie die fehlenden Koordinaten. (1.5 P.)

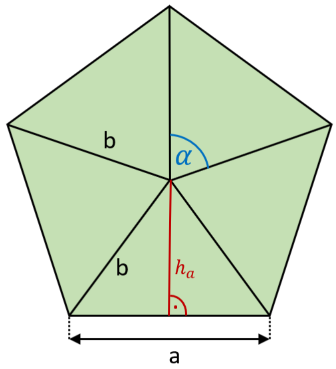
iii. Eine Gerade i ist orthogonal zu g und besitzt die Nullstelle $x = 6$. Berechnen Sie die Gleichung dieser Geraden i. (1.5 P.)

(b) Lineare Gleichungssysteme

Ein Dorfladen kauft vom Imker 40 Gläser Blütenhonig und 30 Gläser Waldhonig für insgesamt 570 CHF. Der Verkaufspreis im Laden ist bei Blütenhonig um 10% höher, bei Waldhonig um 15% höher als der Einkaufspreis. Nachdem der Dorfladen den gesamten Honig verkauft hat, hat er damit einen Gewinn von insgesamt 70.50 CHF gemacht. Wie hoch waren die Einkaufspreise für die beiden Honigsorten? (3 P.)

Aufgabe 3: Trigonometrie (8 Punkte)

Peter möchte für seinen Bruder einen Drachen bauen. Dieser soll die Form eines regelmässigen Fünfecks haben. Die Seitenlänge des Fünfecks beträgt $a = 25$ cm. Das Fünfeck besteht aus fünf gleich grossen gleichschenkligen Dreiecken.



(a) Berechnen Sie

i. die Grösse des Winkels α, (0.5 P.)

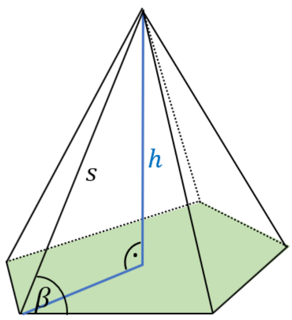
ii. die Seitenlänge b der Schenkel der Dreiecke, (1 P.)

iii. die Höhe h_a (1 P.)

iv. den Flächeninhalt des Fünfecks. (1 P.)

(b) Welchen Winkel schliessen je zwei benachbarte Seiten des Fünfecks ein? (1 P.)

Nun muss Peter an jede der fünf Ecken noch gleich lange Seile anbringen. Dafür hat er insgesamt 4 m Seil zur Verfügung. Davon will er 90% verbrauchen; der Rest wird z. B. für Knoten benötigt.



(c) In welchem Abstand h zur Grundfläche treffen die fünf Seilstücke s zusammen? (2 P.)

(d) Welchen Winkel β schliessen die Seilstücke s jeweils mit der Grundseite des Fünfecks ein? (1 P.)

Aufgabe 4: Quadratisches (8 Punkte)

Gegeben ist eine Parabel p_1 mit der Funktionsgleichung $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$.

(a) Wie lauten die Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse? (0.5 P.)

(b) Berechnen Sie die Nullstellen der Parabel. (1.5 P.)

(c) Bestimmen Sie die Scheitelform der Funktion. Wie lauten die Koordinaten des Scheitelpunktes? (2 P.)

(d) Verschieben Sie nun die Parabel p_1 um drei Einheiten nach links und zwei Einheiten nach unten.

   i. Wie lautet der neue Scheitelpunkt? (0.5 P.)

   ii. Berechnen Sie nun aus der Scheitelform der verschobenen Parabel p_2 deren Normalform: (1.5 P.)

$$y = ax^2 + bx + c$$

   Hinweis: Falls Sie die Scheitelform von p_2 nicht bestimmen konnten, wählen Sie als Ersatzlösung die (falsche) Gleichung $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 2$.

(e) Zeichnen Sie die Parabel p_2 in das Koordinatensystem auf Seite 9 ein. (2 P.)

Aufgabe 5: Potenzen und Wurzeln (8 Punkte)

(a) Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich. Die Resultate dürfen keine Klammern und keine negativen Exponenten enthalten.

i. $a^3 \cdot a^{-5}$ (1 P.)

ii. $\dfrac{2a^3b^2}{(2a^3)^3}$ (1.5 P.)

(b) Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich. Die Resultate dürfen keine Wurzelzeichen enthalten.

i. $\sqrt[3]{x^{12}}$ (1 P.)

ii. $\sqrt[5]{\dfrac{e^3}{f^4}} \cdot \sqrt{e}$ (2 P.)

(c) In der Astronomie werden häufig die Längeneinheiten AE (Astronomische Einheit) sowie Lj (Lichtjahre) verwendet. Hierbei gilt:

$$1 \text{ AE} \approx 1.496 \cdot 10^{11} \text{ m} \qquad \text{und} \qquad 1 \text{ Lj} \approx 9.46 \cdot 10^{15} \text{ m}$$

Im Juli 2020 näherte sich der Komet C/2020 F3, besser bekannt unter dem Namen „Neowise“, der Erde so weit an, dass er gut zwei Wochen lang am Morgen- und Abendhimmel mit blossem Auge sichtbar war.

i. Am 23. Juli 2020 erreichte er mit etwa 103.5 Millionen km die grösste Annäherung an die Erde. Geben Sie diese Entfernung in der Einheit AE an. (1 P.)

ii. Der Komet „Neowise“ besitzt eine elliptische Umlaufbahn um die Sonne. Am sonnenfernsten Punkt dieser Bahn beträgt sein Abstand zur Sonne 709.4 AE. Geben Sie diese Entfernung in wissenschaftlicher Schreibweise in Lichtjahren an. (1.5 P.)

Aufgabe 6: Wachstum und Zerfall (8 Punkte)

Laserstrahlen werden in der Medizin immer häufiger verwendet. Ihre Intensität nimmt mit der Eindringtiefe in das Gewebe exponentiell ab. In 6 mm Tiefe ist die Intensität auf 10% des ursprünglichen Wertes abgesunken.

(a) Bestimmen Sie in der Gleichung $B_n = B_0 \cdot a^n$ den Faktor a pro Millimeter, wobei B_n die Intensität des Laserstrahls in Prozent in n mm Tiefe angibt. (1 P.)

(b) Um wie viel Prozent nimmt die Intensität pro eingedrungenem Millimeter ab? (1 P.)

Hinweis: Falls Sie den Faktor a bei Teilaufgabe (a) nicht finden konnten, wählen Sie den (falschen) Ersatzfaktor $a = 0.65$.

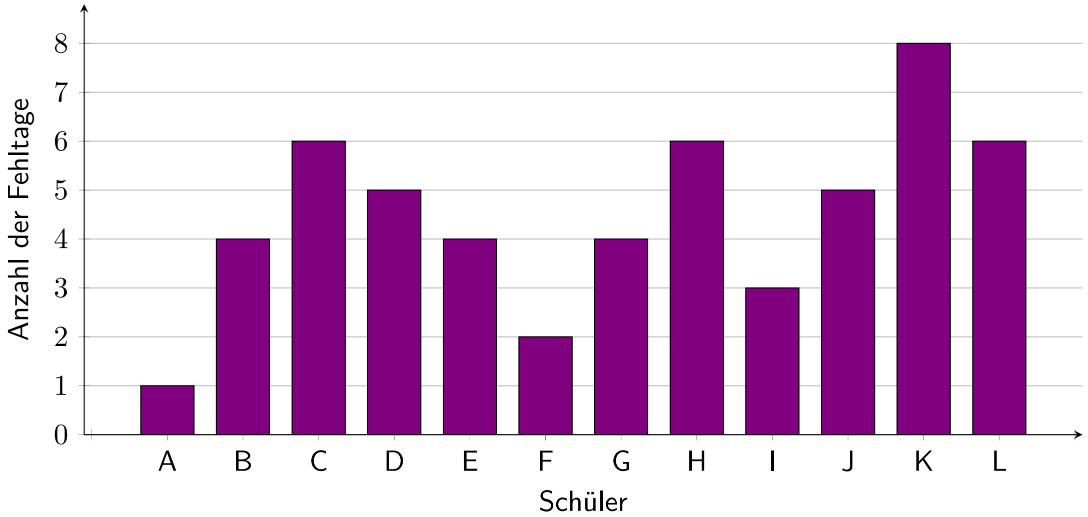
(c) Auf wie viel Prozent des ursprünglichen Wertes ist die Intensität in 10 mm Tiefe abgesunken? (2 P.)

(d) In welcher Tiefe ist die Intensität auf ein Viertel des ursprünglichen Wertes abgesunken? (2 P.)

(e) Wie gross müsste der Faktor a pro Millimeter sein, wenn in 3 mm Tiefe noch 50% Intensität erreicht werden sollte? (2 P.)

Aufgabe 7: Statistik und Stochastik (8 Punkte)

Zwölf Schülerinnen und Schüler (A bis L) wurden zu ihren Fehltagen im Semester befragt. Das Ergebnis wurde in einem Säulendiagramm festgehalten:



(a) Wie viele Schultage fehlten die zwölf Schülerinnen und Schüler insgesamt im Semester? (0.5 P.)

(b) Füllen Sie mit Hilfe des Diagramms die Häufigkeitstabelle auf Seite 10 aus. (2 P.)

(c) Berechnen Sie ohne Verwendung der Statistikfunktionen Ihres Taschenrechners

i. die durchschnittliche Anzahl der Fehltage, (1 P.)

ii. den Modus und den Median der Fehltageverteilung, (1 P.)

iii. die Standardabweichung der Fehltageverteilung. Interpretieren Sie das Ergebnis. (1.5 P.)

(d) Die zwölf Schülerinnen und Schüler sollen an einem Tag in einer bestimmten Reihenfolge befragt werden. Wie viele solcher Reihenfolgen sind möglich? (0.5 P.)

(e) In der Kalenderwoche 37 hat jede(r) der zwölf Schülerinnen und Schüler an genau einem Wochentag gefehlt. Wie viele Möglichkeiten der Verteilung der zwölf Schülerinnen und Schüler auf die fünf Wochentage gibt es? (0.5 P.)

(f) Von den zwölf befragten Schülerinnen und Schülern sind sieben Jungen und fünf Mädchen. Jeweils ein Junge und ein Mädchen werden ausgewählt, um an einer Sitzung der Schülerorganisation über das Thema Fehltage zu diskutieren.

i. Auf wie viele Arten kann man eine solche Zweiergruppe bilden? (0.5 P.)

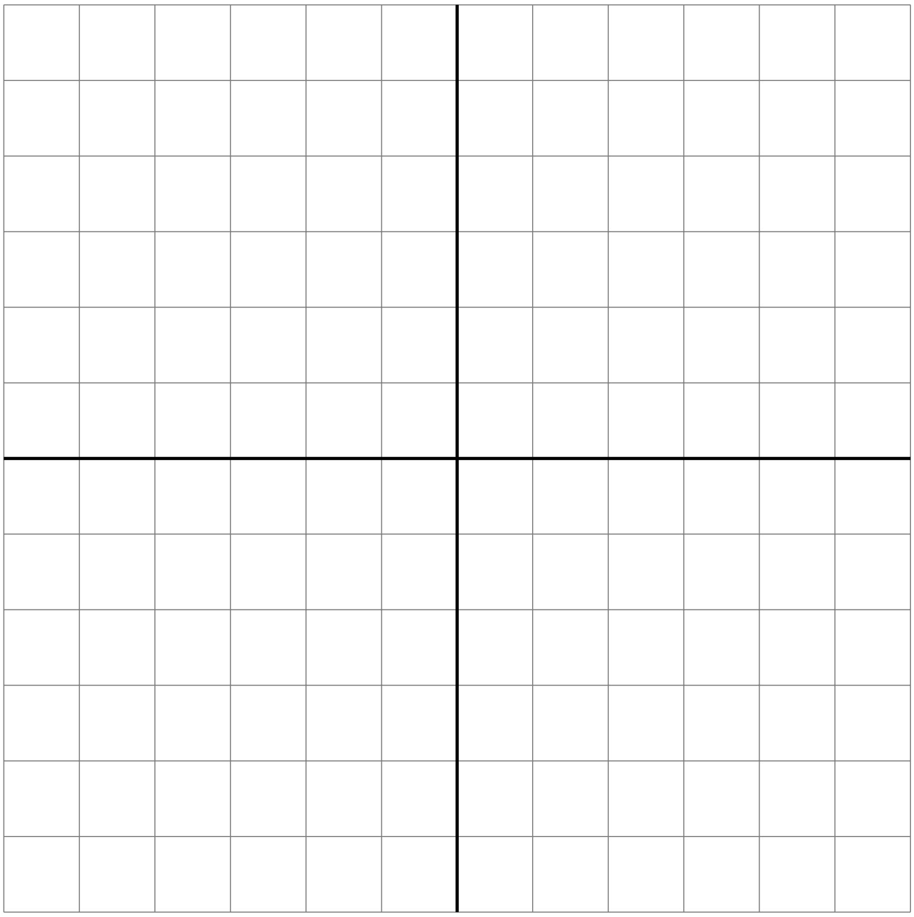
ii. Wie wahrscheinlich ist es, dass gerade Noah und Aline, die befreundet sind, gewählt werden? (0.5 P.)

Schema für Aufgabe 1:

Name: ____________________________ Klasse: _______

Massstab: Ein Häuschen entspricht 1 m.

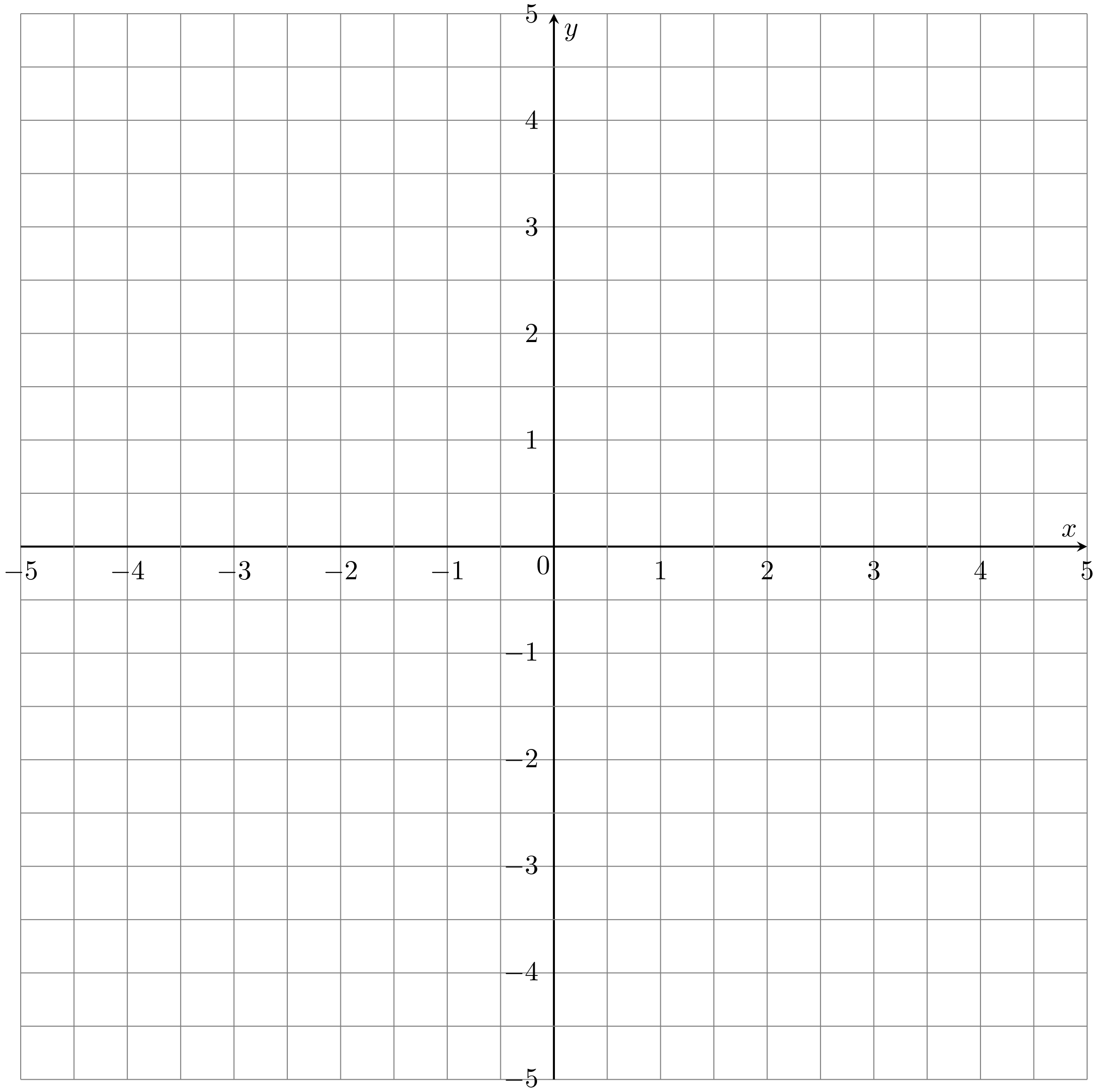
Seitenriss Aufriss



Grundriss

Koordinatensystem für Aufgabe 4:

Name: ____________________________ Klasse: _______



Häufigkeitstabelle für Aufgabe 7:

Name: ____________________________ Klasse: _______

Anzahl der Fehltage	1	2	3	4	5	6	7	8
Absolute Häufigkeit								
Relative Häufigkeit								