Maturitätsprüfungen 2022 – SPF Mathematik schriftlich

Klasse: 4A
Lehrperson: PrG

Bemerkungen:	Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden.
	Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt!
Hilfsmittel:	Taschenrechner TI-*n*spire CAS im Press-to-Test-Modus
	Formelsammlung *Begriffe Formeln Tafeln (DMK)*, ohne Notizen

In denjenigen Teilaufgaben, die **von Hand** gelöst werden müssen, sind nur die einfachen Funktionen Ihres Taschenrechners erlaubt. Um die volle Punktzahl für die jeweilige Teilaufgabe zu erhalten, müssen Sie in diesen Fällen auf Befehle wie dotP, crossP, solve, polyRoots etc. oder das numerische Berechnen von Ableitungen und Integralen verzichten. Die Teilaufgaben, die man in diesem Sinn **von Hand** lösen muss, werden mit dem Symbol ✍ gekennzeichnet.
Im Allgemeinen beschränkt sich die Benutzung des Graphikfensters auf die Visualisierung von Funktionen.
Der Lösungsweg muss in allen Lösungen klar ersichtlich sein. Taschenrechnernutzung muss unter Angabe der genutzten Befehle ausgewiesen werden.

Aufgabe 1: Analysis

Wir betrachten die Funktion mit Graph G_f und der Funktionsgleichung:

$$f(x) = (2x^2 - 1) \cdot e^{-x}$$

Gegeben sei ausserdem die Funktion mit Graph G_g und der Funktionsgleichung:

$$g(x) = e^{-x}$$

Mit e wird jeweils die Euler'sche Konstante bezeichnet.
Taschenrechnereinsatz ist nur in Teilaufgaben c., d. und h. erlaubt.

✍ a. Wie lauten die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen? (2 P.)

✍ b. Bei welchen x-Koordinaten hat G_f horizontale Tangenten? (2 P.)

c. Bestimmen Sie durch Rechnung, um welche Art spezieller Punkte auf dem Graphen es sich bei den den in b. gefundenen Stellen handelt. Taschenrechnereinsatz ist zugelassen. (1 P.)

d. Berechnen Sie die x-Koordinaten etwaiger Wendepunkte von G_f. (1 P.)

✍ e. Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für x gegen ∞. (0.5 P.)

✍ f. Wie gross ist der exakte Wert des Inhalts der im ersten Quadranten von der x-Achse und G_f eingeschlossenen Fläche. (4 P.)

✍ g. Berechnen Sie die x-Koordinaten der Schnittpunkte von G_f und G_g. (1 P.)

h. Wie gross ist der Inhalt der endlichen Fläche, welche von G_f und G_g eingeschlossen wird, gerundet auf zwei Stellen nach dem Komma? Taschenrechnereinsatz ist zugelassen. (1 P.)

Aufgabe 2: Analysis

Wir betrachten die Familie von Funktionen f_k mit den Funktionsgleichungen:

$$f_k(x) = g_k(x) \cdot h_k(x), \quad \text{für } k \in \mathbb{R}, \text{wobei}$$
$$g_k(x) = x^4 - x^3 \cdot k + x^2 \text{ und } h_k(x) = \frac{1}{x^2 - k \cdot x}$$

Taschenrechnereinsatz ist in Teilaufgaben f. und g.(i) erlaubt.

a. Ermitteln Sie alle Definitionslücken von f_k, deren Art und - wo zutreffend - das Vorzeichenverhalten in Abhängigkeit zum Parameter k. (2.5 P.)

b. Bei welchen x-Werten befinden sich die Nullstellen von f_k (abhängig vom Wert von k)? (1.5 P.)

c. Für welche(n) Wert(e) von k liegt der Punkt $(2, 2)$ auf dem Graphen von f_k? (1 P.)

d. Erklären Sie, wie sich der Grad der zu f_k asymptotischen Polynome auf einen Blick ermitteln lässt. (0.5 P.)

e. Berechnen Sie die Polynome, an deren Graphen sich G_{f_k} für grosse Werte von x anschmiegt. (1.5 P.)

f. Wir betrachten die Funktion f_{-2}, dh $k = -2$. Welcher Punkt auf dem Graphen dieser Funktion liegt am nächsten beim Punkt $(2, 2)$? - Wie gross ist die Distanz? (2 P.)

g. Wir betrachten die Funktionen $h_k(x) = \dfrac{1}{x^2 - k \cdot x}$.

   (i) Berechnen Sie die Koordinaten der Maxima für die entsprechende Kurvenschar und nennen Sie die Werte von k, für welche solche existieren. (1.5 P.)

   (ii) Wie lautet die Gleichung der Ortskurve, auf welcher sich die Hochpunkte bewegen. (1 P.)

Aufgabe 3: Stochastik

Für diese Aufgabe darf der Taschenrechner ohne Einschränkung der Funktionalität genutzt werden.

Ein medizinischer Test stelle in 90% der Fälle korrekt fest, dass ein Patient einen bestimmten Infekt hat. Leider werden auch 20% von nicht infizierten Patienten fälschlicherweise positiv getestet.

a. Zehn Personen sitzen für den Test im Wartebereich. Sieben davon seien infiziert, drei nicht. Die Personen werden in zufälliger Reihenfolge aufgerufen.

   Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass

   (i) die als erstes aufgerufene Person infiziert ist? (0.5 P.)

   (ii) die als erstes aufgerufene Person positiv getestet wird? (1.5 P.)

   (iii) die ersten drei aufgerufenen Personen *negativ* getestet werden? (2 P.)

   (iv) Die erste getestete Person erhält ein positives Testergebnis. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie tatsächlich infiziert ist? (1 P.)

b. Ein weiterer Testanbieter möchte sein Produkt auf den Markt bringen. Die Firma behauptet, dass der neue Test 95% der infizierten Personen korrekt ermittelt.

   Wie viele infizierte Probanden müssten an einer Studie mindestens teilnehmen, um die behauptete Überlegenheit über den herkömmlichen Test zu klären, wenn die Fehlerwahrscheinlichkeiten weniger als 10% betragen sollen? Nehmen Sie als kritischen Wert einfachheitshalber den Mittelwert der Erwartungswerte. Kommentieren Sie Ihr Vorgehen und benennen Sie alle Kennzahlen.

   Die folgenden Begriffe/Werte müssen erklärt/berechnet werden:

   - Nullhypothese / alternative Hypothese
   - Erwartungswerte
   - Kritischer Wert
   - Ablehnungsbereich
   - Fehler 1. und 2. Art
   - Fehlerwahrscheinlichkeiten mit den typischen Bezeichnungen

   (4.5 P.)

Aufgabe 4: Vektorgeometrie

Für diese Aufgabe darf der Taschenrechner ohne Einschränkung der Funktionalität genutzt werden.
Gegeben seien die Punkte $M(1|2|3)$ und $Z(-1|5|9)$ sowie die Gleichung einer Kugel K:

$$K : x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z - 35 = 0$$

Gegeben seien ausserdem die Gerade g:

$$g : \begin{pmatrix} 43/3 \\ -33/2 \\ -48 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 31/3 \\ -25/2 \\ -53 \end{pmatrix}$$

sowie die Ebene F:

$$F : -3x + 6y - 2z = -46$$

Eine Ebene E berühre die Kugel K im Punkt Z.

a. Zeigen Sie, dass M Zentrum von K ist und Z auf der Kugel K liegt. (1 P.)

b. Bestätigen Sie durch Rechnung die Koordinatengleichung der Ebene $E : 2x - 3y - 6z = -71$. (1.5 P.)

c. Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Gerade g eine Tangente an die Kugel K ist und berechnen Sie den Berührungspunkt Q von K und g. (3 P.)

d. Zeigen Sie, dass die Ebene F tangential zur Kugel K verläuft. (1 P.)

e. Berechnen Sie die Parametergleichung der Schnittgeraden von E und F. (1 P.)

Wir betrachten im Weiteren den aufrechten Kegel C mit folgenden Eigenschaften:

- Die Grundfläche des Kegels C liege in der Ebene E,
- der Mittelpunkt der Grundfläche sei Z,
- die Gerade g sei eine Mantellinie.

f. Berechnen Sie die Koordinaten der Spitze S des Kegels C und zeigen Sie, dass der Öffnungswinkel des Kegels $C \approx 28.35°$ beträgt. (4.5 P.)

Aufgabe 5: Vermischtes

✍ Alle Aufgaben dieses Abschnitts voneinander unabhängiger Aufgaben sind ohne die Hilfe des Taschenrechners zu lösen.

a. **Komplexe Zahlen**

Geben Sie alle Lösungen in der rechtwinklingen/kartesischen Form ($a + i \cdot b$, $a, b \in \mathbb{R}$) an.

(i) Finden Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung: $z^2 - (5 + i) \cdot z + (8 + i) = 0$ (4 P.)

(ii) z_1 und z_2 seien in Polarkoordinaten gegeben: $z_1(2, \frac{\pi}{3})$ und $z_2(3, \frac{\pi}{3})$
Berechnen Sie ohne Taschenrechner: $z_1 \cdot z_2$ und geben Sie das Resultat in möglichst einfacher rechtwinkliger/kartesicher From an. (1 P.)

b. **Kegelschnitte**

Zeigen Sie, dass es sich bei der Punktmenge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5y^2 = 7x^2 - 35\}$ um eine Hyperbel in Normallage handelt. Geben Sie die Werte der Halbachsen und die Koordinaten der linearen Exzentritzität (Brennweite) an, sowie die Gleichungen der Asymptoten. (2.5 P.)

c. **Vollständige Induktion**

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für $f(x) = \frac{1}{ax + b}$ gilt: (3 P.)

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{a^n \cdot n!}{(ax + b)^{n+1}}$$

Wobei $f^{(n)}(x)$ die n-te Ableitung von f ist für $n \geq 1$ und per Definition: $f^{(0)}(x) = f(x)$.