Maturité 2022 – Examen écrit de mathématiques

Classes : 4SI (bilingues français), 4SW

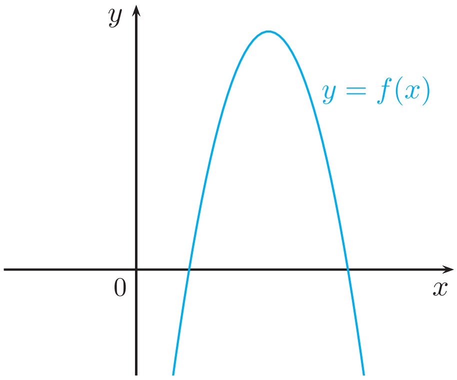
Enseignants : PeM, ZuA

Durée de l'examen :	4 heures
Remarque :	Commencer chaque exercice sur une nouvelle feuille.
Ressources autorisées :	Calculatrice TI-$n$spire CX, en mode *Press-to-Test*
	Formulaire (*Fundamentum Mathematik und Physik*), sans annotations
	Dictionnaire français-allemand

Les calculs des questions précédées du symbole ✍ doivent être faits **à la main**. Pour ces questions, seules les fonctionnalités élémentaires de la calculatrice sont autorisées. Pour obtenir la totalité des points dans ce cas, il faudra travailler **sans** utiliser les fonctions telles que *dotP*, *crossP*, *nSolve*, *polyRoots*, ainsi que le calcul numérique de dérivées ou d'intégrales.
La fenêtre graphique ne doit alors être utilisée que pour visualiser les graphes de fonctions.

Exercice 1 : Analyse (11 points)

Le graphe de la fonction $f(x) = -x^2 + 10x - 16$ est donné ci-dessous.



✍(a) Calculer les coordonnées des points d'intersection du graphe de f avec l'axe x, puis celles du point maximum du graphe de f. (2,5 P.)

(b) Les trois points de la question (a) définissent un triangle. Quel est son périmètre ? (1,5 P.)

(c) Le graphe de f coupe l'axe y en un point qui n'est pas visible sur la figure donnée. Calculer l'angle formé par le graphe et l'axe y en ce point. (1,5 P.)

Le graphe de f définit avec l'axe x dans le premier quadrant une surface. A l'intérieur de cette surface, on inscrit un rectangle tel que deux de ses sommets se trouvent sur l'axe x, les deux autres sommets se trouvent sur le graphe de f. Soient u la longueur du côté horizontal et v la longueur du côté vertical de ce rectangle.

(d) Faire un schéma de la situation décrite. (0,5 P.)

(e) Expliquer pourquoi la longueur du côté vertical du rectangle peut être donnée par la formule : $v = f(5 + \frac{u}{2})$. (1 P.)

✍(f) Calculer l'aire maximale d'un tel rectangle. (4 P.)

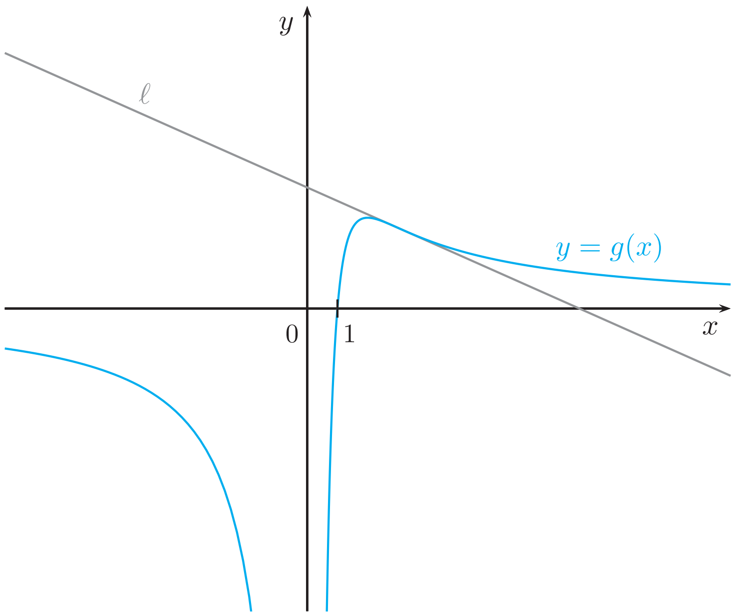
Exercice 2 : Analyse (12 points)

Note : Les deux parties (a) et (b) de cet exercice sont indépendantes l'une de l'autre.

(a) La fonction rationnelle qui a pour expression

$$g(x) = \frac{12x - 12}{x^2}$$

ainsi que la droite ℓ d'équation $y = -\frac{4}{9}x + 4$ sont représentées ci-dessous.



i. Déterminer les équations de toutes les asymptotes du graphe de g. Toute réponse devra être justifiée. (1,5 P.)

ii. Calculer les coordonnées du point d'intersection du graphe de g avec la droite ℓ. Montrer par un calcul que la droite ℓ est tangente au graphe en ce point. (3 P.)

iii. Le graphe de g et la droite ℓ définissent pour $x \geq 1$ une surface fermée dans le premier quadrant. Calculer l'aire A de cette surface. On donnera sa valeur exacte. (3,5 P.)

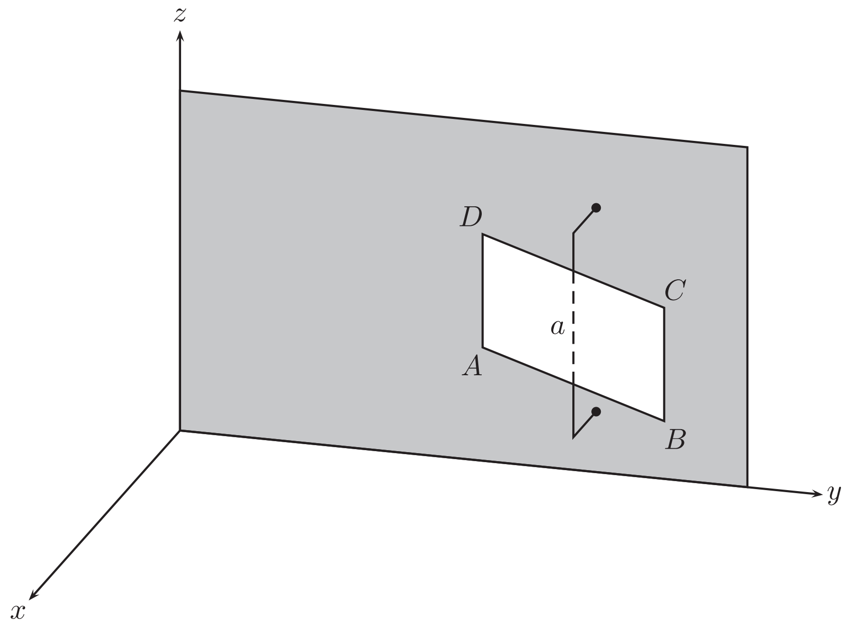
(b) Le graphe de la fonction rationnelle

$$h(x) = \frac{ax^2 + b}{x + c}$$

admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$ et un point extremum $P\,(6\,|\,3\,)$. Déterminer les valeurs des paramètres a, b et c. (4 P.)

Exercice 3 : Géométrie vectorielle (12 points)

Sur le schéma d'une salle de conférences, un mur est représenté sur le plan yz. Un écran[1] rectangulaire $ABCD$ est fixé sur ce mur, de telle sorte qu'il puisse tourner autour d'un axe noté a (voir schéma ci-dessous). Cet axe passe par le centre du rectangle $ABCD$.
On donne les coordonnées de trois points du rectangle : $A\,(\,0\,|\,4\,|\,1{,}5\,)$, $B\,(\,1{,}5\,|\,7\,|\,1{,}5\,)$ et $C\,(\,1{,}5\,|\,7\,|\,3\,)$.



(a) Calculer les coordonnées du point D. (0,5 P.)

(b) Calculer l'aire de l'écran $ABCD$. (2 P.)

(c) On note Π le plan sur lequel se trouve l'écran $ABCD$. Déterminer une équation cartésienne du plan Π, et montrer que cette équation peut s'écrire : $2x - y + 4 = 0$. (2,5 P.)

(d) Sur le schéma ci-dessus, le côté gauche $\overline{AD}$ de l'écran est positionné contre le mur (il touche le mur). Calculer l'angle formé par l'écran et le mur. (2 P.)

Pendant une présentation, un pointeur laser situé au point $L\,(\,4\,|\,3\,|\,2\,)$ émet un rayon lumineux et touche l'écran au point P.

(e) Le pointeur laser est orienté de telle sorte que la distance entre L et P soit la plus courte possible. Calculer les coordonnées du point P. (2 P.)

(f) Vérifier que ce point P est bien sur l'écran $ABCD$. (0,5 P.)

(g) Déterminer une équation paramétrique de la droite d sur laquelle se trouve l'axe de rotation a. (1,5 P.)

(h) L'écran est ensuite tourné pour que le côté droit $\overline{BC}$ soit placé contre le mur. L'écran se trouve alors sur un plan qui a pour équation : $4x + 2y + k = 0$. Calculer k. (1 P.)

1. *Projektionsfläche*

Exercice 4 : Probabilité (12 points)

Cet exercice est composé de trois parties (a), (b) et (c) indépendantes.

(a) Un groupe de 24 personnes doit faire un voyage. Par précaution, on choisit au hasard 15 de ces personnes pour un test antigénique rapide du coronavirus.

i. De combien de façons différentes peut-on choisir les 15 personnes ? (1 P.)

Le groupe est constitué de 17 adultes et 7 enfants.

ii. Quelle est la probabilité que tous les sept enfants soient choisis pour le test ? (1,5 P.)

iii. Quelle est la probabilité qu'au moins cinq enfants soient choisis pour le test ? (1,5 P.)

(b) On considère que 6 tests rapides du coronavirus sur 1000 sont défectueux[2], en moyenne. Les tests sont vendus par boîtes contenant chacune 150 tests rapides.

i. Quelle est la probabilité de trouver exactement deux tests défectueux dans une boîte ? (1 P.)

ii. Quelle est la probabilité de trouver plus de quatre tests défectueux dans une boîte ? (1,5 P.)

iii. Combien de boîtes faudrait-il contrôler pour que la probabilité de trouver au moins un test défectueux soit supérieure à 98 % ? (2 P.)

(c) Dans cette dernière partie, on suppose que les tests utilisés sont tous de bonne qualité (aucun n'est défectueux).

Un test rapide du coronavirus a une *sensiblité*[3] de 95 % et une *spécificité*[4] de 98 %. Cela signifie que pour une personne :

- qui a réellement le coronavirus, la probabilité que le test soit positif est de 95 % ;
- qui n'a pas le coronavirus, la probabilité d'avoir un test négatif est de 98 %.

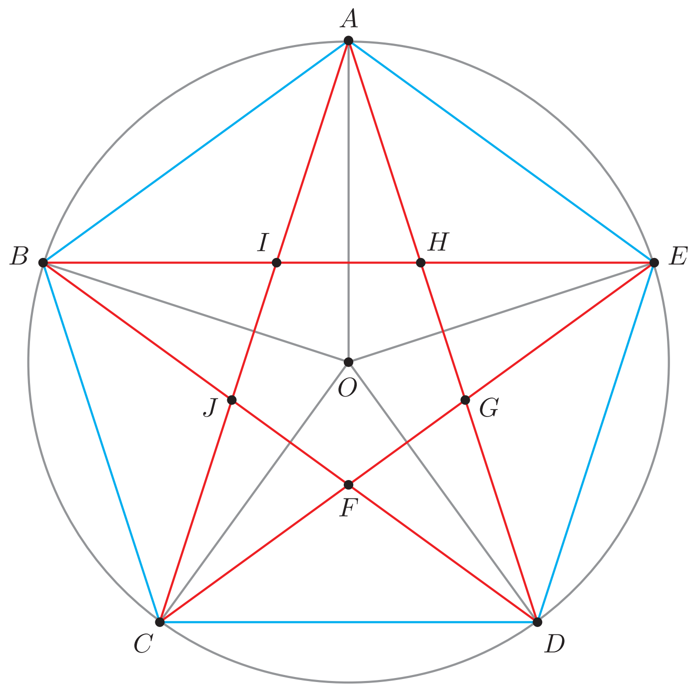
i. On considère une ville X où une personne sur dix est infectée par le coronavirus.
Un habitant de la ville X, choisi au hasard, est testé positif au coronavirus. Calculer la probabilité que cette personne soit réellement atteinte par le coronavirus. (1,5 P.)

ii. Les 1'000 habitants d'un village Y sont testés (avec le même type de tests décrit ci-dessus). Au total, 40 de ces habitants ont été testés positifs.
Estimer le nombre d'habitants du village Y qui ont obtenu un résultat négatif et qui étaient malgré tout infectés par le coronavirus (faux-négatifs). (2 P.)

2. *fehlerhaft*
3. *Sensitivität*
4. *Spezifität*

Exercice 5.1 : Trigonométrie (7 points)

La figure ci-dessous montre un pentagone régulier[5] $ABCDE$ inscrit dans un cercle. Le périmètre[6] du pentagone est égal à 25 cm.



(a) Calculer l'angle $\angle AOB$. (0,5 P.)

(b) Calculer le rayon du cercle. (1 P.)

(c) Calculer la longueur de la diagonale $\overline{AC}$. (1,5 P.)

(d) Les cinq diagonales du pentagone $ABCDE$ forment un nouveau pentagone : le pentagone plus petit $FGHIJ$. Calculer le périmètre de $FGHIJ$.

Indication : On pourra remarquer que les triangles ACB et BAI sont semblables : ils sont tous deux isocèles et les angles $\angle BAC$ et $\angle BAI$ sont égaux. (2 P.)

Si vous n'avez pas trouvé de réponse à la question (d), vous pouvez utiliser 9,6 cm pour le périmètre de $FGHIJ$.

(e) On note p_0 le périmètre du plus grand pentagone $ABCDE$, et p_1 le périmètre du nouveau pentagone $FGHIJ$. Les cinq diagonales de $FGHIJ$ forment un autre nouveau pentagone, encore plus petit, pour lequel le périmètre sera noté p_2. On peut répéter le processus indéfiniment, et former des pentagones de plus en plus petits, avec les périmètres p_3, p_4, p_5, etc.

Calculer p_2 et p_{20}. Donner la valeur p_{20} en nanomètres ($1\,\text{nm} = 10^{-9}\,\text{m}$). (2 P.)

5. *regelmässiges Fünfeck*
6. *Umfang*

Exercice 5.2 : Logarithmes (6 points)

Les moteurs de recherche comme Google ou Yahoo utilisent des algorithmes de classement [7]. Ces algorithmes permettent de trier les sites Web selon leur pertinence. Le classement d'un site Web est d'autant plus grand que ce site est fréquemment visité.

Un moteur de recherche donné utilise le principe suivant : si un site Web est visité x fois en un mois, alors le classement y de ce site est calculé par la formule

$$y = 1{,}5 \cdot \log\left(\frac{x}{250}\right)$$

où $\log$ est la fonction logarithme de base 10.

✍ (a) Le site `www.page1.ch` a un classement égal à 6. Combien de fois est-il visité par mois ? (1,5 P.)

(b) Le site `www.page2.ch` est cent fois plus visité que le site `www.page3.ch`. De combien son classement est-il supérieur ? (2 P.)

✍ (c) Un second moteur de recherche utilise le principe suivant : si un site Web est visité x fois en un mois, alors le classement y de ce site est calculé par la formule

$$y = a \cdot \log\left(\frac{x}{b}\right)$$

Un site Web, visité 160'000 fois par mois, a un classement égal à 4 tandis qu'un site Web, visité 200 millions de fois par mois, a un classement égal à 8. Déterminer les valeurs de a et b (2,5 P.)

7. *Ranking*