Maturitätsprüfungen 2022 – Mathematik schriftlich

Klassen: 4Ba, 4KSW, 4KW, 4MW, 4SI, 4SZ, 4Wa, 4Wb
Lehrpersonen: BoJ, FrC, HnR, KiA, KrD, SeM, SeS, UgR

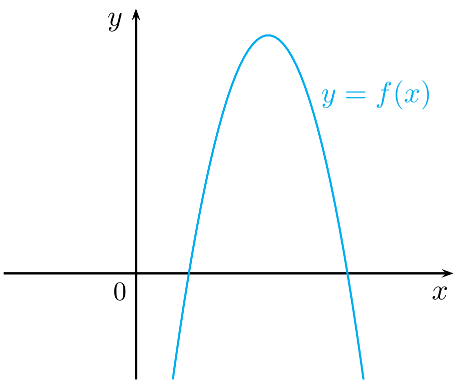
Bemerkungen:	Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden.
	Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt!
Hilfsmittel:	Taschenrechner TI-*n*spire CX im Press-to-Test-Modus oder TI-30X Pro
	Formelsammlung *Fundamentum Mathematik und Physik*, ohne Notizen

Die Teilaufgaben, die mit dem Symbol ✍ gekennzeichnet sind, müssen **von Hand** gelöst werden. Bei diesen Aufgaben sind nur die einfachen Funktionen Ihres Taschenrechners erlaubt. Um die volle Punktzahl für die jeweilige Aufgabe zu bekommen, müssen Sie auf Befehle wie dotP, nSolve, polyRoots oder das numerische Berechnen von Ableitungen und Integralen verzichten.

Im Allgemeinen beschränkt sich die Benutzung des Graphikfensters auf die Visualisierung von Funktionen.

Aufgabe 1: Analysis (11 Punkte)

Im Folgenden ist der Graph der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = -x^2 + 10x - 16$ abgebildet:



✍(a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte mit der x-Achse sowie des Hochpunktes des Graphen von f. (2.5 P.)

(b) Die drei Punkte von Teilaufgabe (a) bilden ein Dreieck. Wie gross ist sein Umfang? (1.5 P.)

(c) Nicht ersichtlich in der obigen Abbildung ist der y-Achsenabschnitt des Graphen von f. Welchen Winkel schliesst der Graph mit der y-Achse ein? (1.5 P.)

Zusammen mit der x-Achse begrenzt der Graph von f im ersten Quadranten ein Flächenstück. In diesem Flächenstück ist ein Rechteck einzubeschreiben, so dass zwei Eckpunkte auf der x-Achse und die zwei anderen Eckpunkte auf dem Graphen von f liegen. Seien u die Länge der horizontalen Seite und v die Länge der vertikalen Seite des Rechtecks.

(d) Skizzieren Sie die beschriebene Situation. (0.5 P.)

(e) Erklären Sie, warum die Länge der vertikalen Seite des Rechtecks durch die Formel $v = f(5+\frac{u}{2})$ angegeben werden kann. (1 P.)

✍(f) Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt eines solchen Rechtecks. (4 P.)

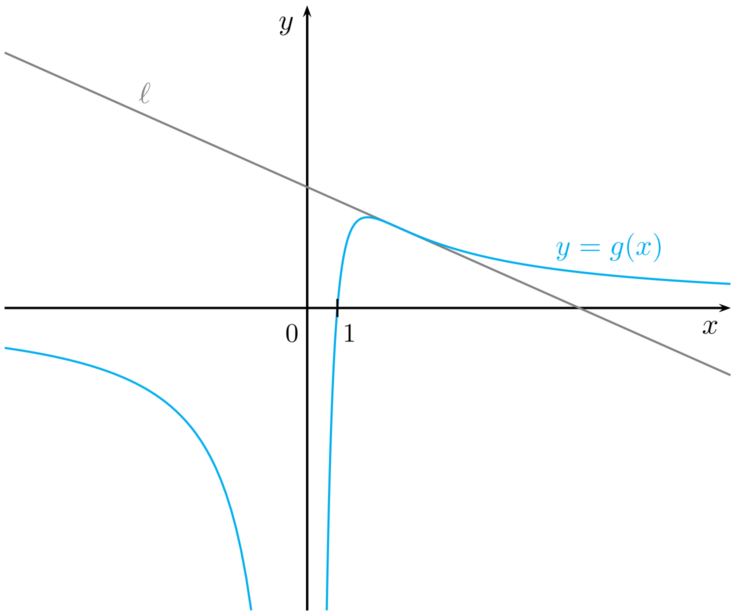
Aufgabe 2: Analysis (12 Punkte)

Die zwei Teilaufgaben (a) und (b) sind voneinander unabhängig.

(a) Im Folgenden sind der Graph der gebrochenrationalen Funktion g mit der Gleichung

$$g(x) = \frac{12x - 12}{x^2}$$

sowie die Gerade ℓ mit der Gleichung $y = -\frac{4}{9}x + 4$ abgebildet:



✍ i. Bestimmen Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von g. Begründen Sie Ihre Aussagen. (1.5 P.)

ii. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes des Graphen von g mit der Geraden ℓ. Zeigen Sie rechnerisch, dass die Gerade ℓ an dieser Stelle eine Tangente des Graphen ist. (3 P.)

✍ iii. Für $x \geq 1$ bilden der Graph von g, die Tangente ℓ und die x-Achse im ersten Quadrant eine geschlossene Fläche A. Berechnen Sie den Flächeninhalt von A. Geben Sie die exakte Lösung an. (3.5 P.)

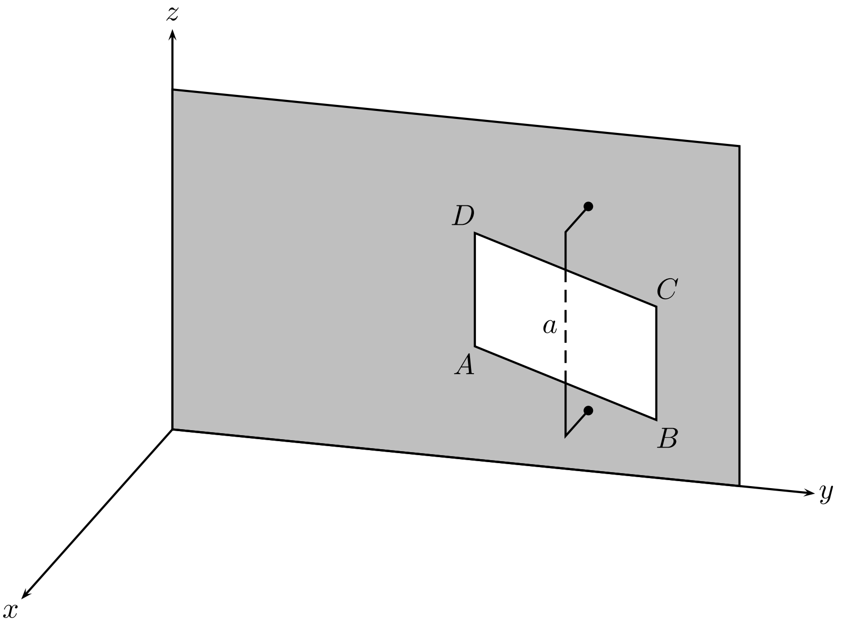
✍ (b) Der Graph der gebrochenrationalen Funktion

$$h(x) = \frac{ax^2 + b}{x + c}$$

hat eine vertikale Asymptote bei $x = 2$ und einen lokales Extremum im Punkt $(6|3)$. Bestimmen Sie die Parameter a, b und c der Funktion h. (4 P.)

Aufgabe 3: Vektorgeometrie (12 Punkte)

Das Modell eines Konferenzraums ist so gewählt, dass eine Wand durch die y-z-Ebene dargestellt ist. An dieser Wand ist eine rechteckige Projektionsfläche $ABCD$ angebracht, die um die vertikale Achse a schwenkbar ist (siehe Abbildung). Der Mittelpunkt von $ABCD$ liegt auf dieser Achse.
Drei der vier Eckpunkte haben die Koordinaten $A(0|4|1.5)$, $B(1.5|7|1.5)$ und $C(1.5|7|3)$.



(a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D. (0.5 P.)

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Projektionsfläche. (2 P.)

(c) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der die Projektionsfläche liegt, und zeigen Sie, dass sie der Gleichung $2x - y + 4 = 0$ entspricht. (2.5 P.)

(d) Die linke Seite $\overline{AD}$ der Projektionsfläche berührt die dahinter liegende Wand. Berechnen Sie die Grösse des Winkels, den die Projektionsfläche mit der Wand einschliesst. (2 P.)

Während einer Präsentation wird ein Laserpointer verwendet. Der Laserpointer befindet sich im Punkt $L(4|3|2)$.

(e) In welchem Punkt P trifft der Laserstrahl auf die Ebene E, wenn der Laserpointer so gehalten wird, dass der Weg des Laserstrahls möglichst kurz ist? (2 P.)

(f) Überprüfen Sie, ob der Punkt P auch auf der Projektionsfläche liegt. (0.5 P.)

(g) Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Geraden g, auf der die Drehachse a liegt. (1.5 P.)

(h) Wird die Projektionsfläche um die Achse a so gedreht, dass die rechte Seite $\overline{BC}$ die Wand berührt, liegt sie neu in der Ebene $4x + 2y + k = 0$. Bestimmen Sie den Wert für k. (1 P.)

Aufgabe 4: Wahrscheinlichkeitsrechnung (12 Punkte)

Die Aufgabenteile (a), (b) und (c) sind voneinander unabhängig.

(a) Aus einer Reisegruppe von 24 Personen werden nach dem Zufallsprinzip 15 Personen für einen Corona-Antigen-Schnelltest aufgeboten.

   i. Wieviele Möglichkeiten gibt es, diese 15 Personen auszuwählen? (1 P.)

   Die Reisegruppe besteht aus 17 Erwachsenen und 7 Kindern.

   ii. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle sieben Kinder getestet werden? (1.5 P.)

   iii. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens fünf Kinder getestet werden? (1.5 P.)

(b) Es wird angenommen, dass 6 von 1000 Corona-Antigen-Schnelltests Qualitätsmängel aufweisen. Die Tests werden in Schachteln à 150 Stück verkauft.

   i. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in einer Schachtel genau zwei mangelhafte Tests vorzufinden? (1 P.)

   ii. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in einer Schachtel mehr als vier mangelhafte Tests vorzufinden? (1.5 P.)

   iii. Wieviele Schachteln müssen mindestens kontrolliert werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98% mindestens einen mangelhaften Test vorzufinden? (2 P.)

(c) Bei dieser Teilaufgabe wird davon ausgegangen, dass nur Corona-Antigen-Schnelltests ohne Qualitätsmängel verwendet werden.

   Ein Corona-Antigen-Schnelltest weist eine Sensitivität von 95% auf. Das heisst, bei einer kranken Testperson zeigt der Test mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% positiv an. Weiter zeigt der Test bei einer gesunden Person mit einer Wahrscheinlichkeit von 98% ein negatives Testergebnis an (Spezifität).

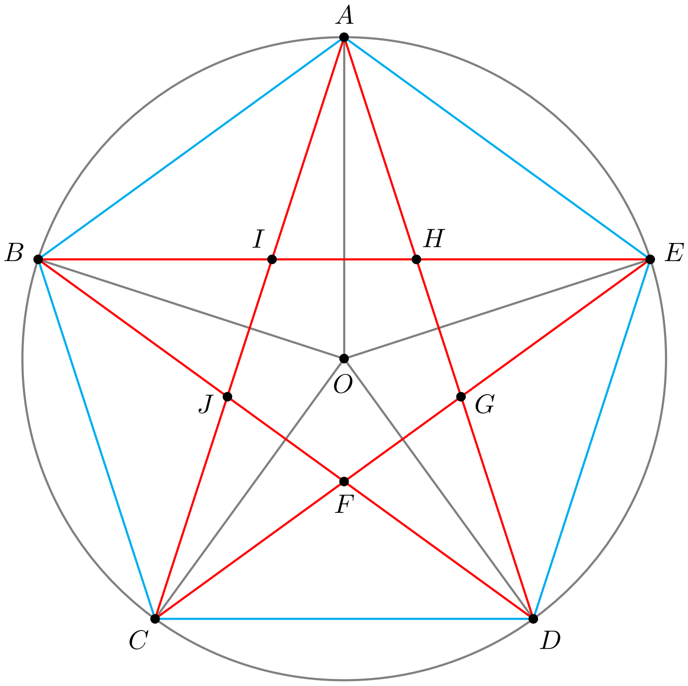
   i. Es wird angenommen, dass in der Gemeinde X jede zehnte Person mit dem Coronavirus infiziert ist.

      Das Testergebnis eines zufällig ausgewählten Bewohners von Gemeinde X sei positiv. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Bewohner tatsächlich an Corona erkrankt ist. (1.5 P.)

   ii. Alle 1000 Personen einer anderen Gemeinde Y wurden getestet: 40 der insgesamt 1000 Personen erhielten ein positives Testergebnis. Wie gross ist die erwartete Anzahl der Personen, die trotz negativem Ergebnis an Corona erkrankt sind (falsch-negatives Ergebnis)? (2 P.)

Aufgabe 5.1: Trigonometrie (7 Punkte)

Unten abgebildet ist ein Kreis, in den ein regelmässiges Fünfeck $ABCDE$ von Umfang 25 cm einbeschrieben wurde.



(a) Berechnen Sie den Winkel $\angle AOB$. (0.5 P.)

(b) Berechnen Sie den Radius des Kreises. (1 P.)

(c) Berechnen Sie die Länge der Diagonalen $\overline{AC}$. (1.5 P.)

(d) Die fünf Diagonalen des ursprünglichen Fünfecks $ABCDE$ bilden ein neues, kleineres Fünfeck $FGHIJ$. Berechnen Sie den Umfang von $FGHIJ$.

Hinweis: Beachten Sie, dass die Dreiecke ACB und BAI ähnlich sind. Sie sind beide gleichschenklig und besitzen den gleichen Basiswinkel $\angle BAC = \angle BAI$. (2 P.)

Falls Sie die Teilaufgabe (d) nicht lösen konnten, gehen Sie im Folgenden davon aus, dass der Umfang vom Fünfeck $FGHIJ$ 9.6 cm beträgt.

(e) Wir bezeichnen mit p_0 den Umfang des ursprünglichen Fünfecks $ABCDE$ und mit p_1 den Umfang des neuen Fünfecks $FGHIJ$. Die fünf Diagonalen von $FGHIJ$ bilden ebenfalls ein neues Fünfeck, dessen Umfang wir mit p_2 bezeichnen. Der Vorgang kann beliebig wiederholt werden, um immer kleinere Fünfecke zu bilden. Ihre Umfänge bezeichnen wir mit p_3, p_4, p_5, und so weiter.

Berechnen Sie p_2 und p_{20}. Geben Sie Ihre Antwort für p_{20} in Nanometer an. (1 nm $= 10^{-9}$ m) (2 P.)

Aufgabe 5.2: Logarithmen (6 Punkte)

Suchmaschinen wie Google und Yahoo verwenden **PageRank**-Algorithmen, um Webseiten nach Relevanz zu sortieren. Je höher der PageRank einer Webseite, desto öfter wird sie besucht.

Eine gewisse Suchmaschine verwendet die folgende Formel, um PageRanks zu berechnen: Einer Webseite mit x Besuchern pro Monat wird der PageRank y zugewiesen, wobei

$$y = 1.5 \log\left(\frac{x}{250}\right)$$

und $\log$ den Logarithmus zur Basis 10 bezeichnet.

✍(a) Die Webseite `www.page1.ch` hat ein PageRank von 6. Wie oft wird sie besucht? (1.5 P.)

(b) Die Webseite `www.page2.ch` hat hundertmal so viele monatliche Besucher wie die Webseite `www.page3.ch`. Wie viel höher ist ihr PageRank? (2 P.)

✍(c) Eine andere Suchmaschine verwendet die folgende Formel, um PageRanks zu berechnen: Einer Webseite mit x Besuchern pro Monat wird der PageRank y zugewiesen, wobei

$$y = a \log\left(\frac{x}{b}\right)$$

Berechnen Sie die Zahlen a und b, so dass eine Webseite mit 160000 monatlichen Besuchern den PageRank 4, eine Webseite mit 200 Millionen monatlichen Besuchern den PageRank 8 hat. (2.5 P.)