Maturitätsprüfungen 2021 – Mathematik schriftlich

Klasse 4A (FrC)

Prüfungsdauer:	4 Stunden
Erlaubte Hilfsmittel:	TI NSpire CX CAS und Ihre Formelsammlung (Formeln, Tabellen, Begriffe, Orell Füssli Verlag).
Bemerkungen:	Der Rechner muss im Press-to-Test-Modus sein. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite!
Punkteverteilung:	

1	2	3	4	5	Total
25.5	8	13	6	11.5	64

Teil 1 ohne TR

Den Taschenrechner erhalten Sie gegen Abgabe der Lösungen von Teil 1.

Aufgabe 1 - Voneinander unabhängige Aufgaben

a) Berechnen Sie das Volumen des durch den Ursprung und die Punkte $A(1|1|1|)$, $B(2|-1|0)$ und $C(-1|0|2)$ bestimmten unregelmässigen Tetraeders. (3 P.)

b) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. (2 P.)

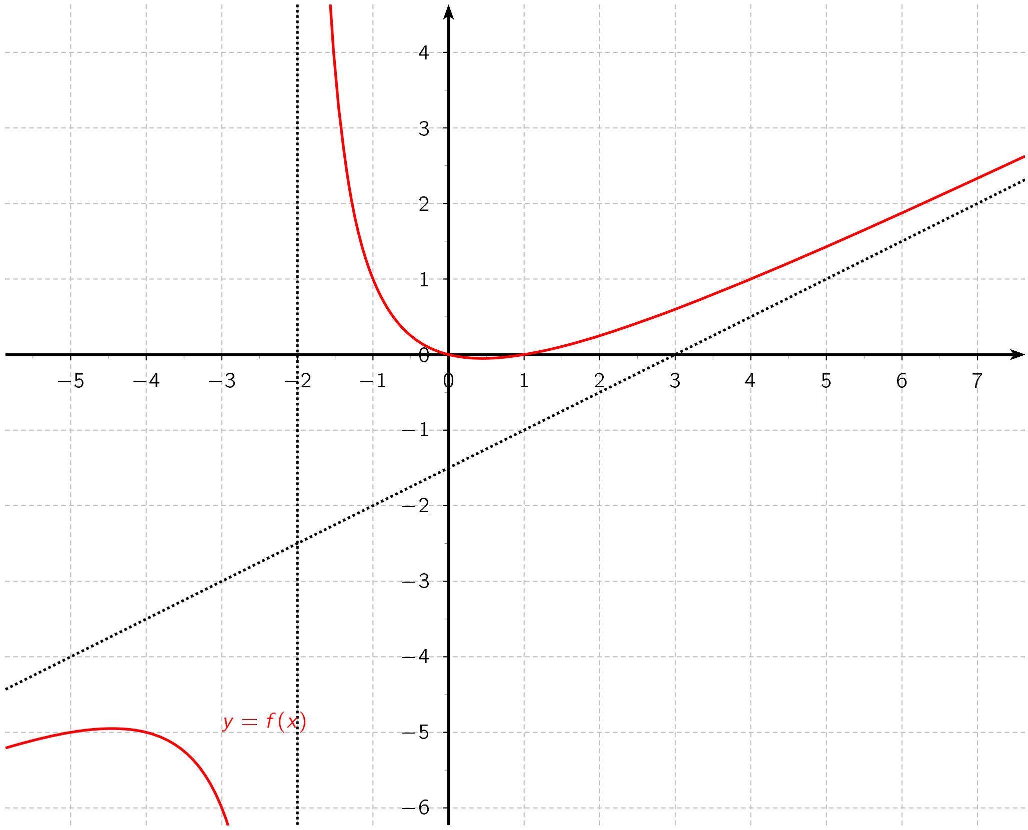
c) Gegeben sei ein Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung und dem Radius $\sqrt{13}$. Vom Punkt $P(5|1)$ aus sollen die Tangenten an den Kreis gelegt werden. Geben Sie deren Gleichungen an. (4 P.)

d) Ein Gummiball wird von der Höhe $h_0 = 1\,\text{m}$ fallen gelassen. Durch diverse Energieverluste erreicht er jeweils genau 50% der vorhergehenden Höhe. Berechnen Sie den insgesamt zurückgelegten Weg bis zum Stillstand des Balles. (2 P.)

e) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^\infty x \cdot e^{-x}\, dx$. (3 P.)

f) Bestimmen Sie die Menge aller komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, für welche $Re(z^2) = Im(z)$ gilt. Zeichnen Sie diese Menge möglichst genau in der Gaussschen Zahlenebene ein. Um was für ein geometrisches Objekt handelt es sich? (3.5 P.)

g) Welche gebrochen rationale Funktion könnte diesen Graphen erzeugen? (2 P.)



h) Beweisen Sie durch ableiten , dass $F(x) = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$ Stammfunktion von $f(x) = \sqrt{a^2+x^2}$ ist. (3 P.)

i) Zeigen Sie mittels Integralrechnung, dass das Volumen der Kugel mit Radius R durch $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ gegeben ist. (3 P.)

Teil 2 mit TR

Der Taschenrechner wird gegen Abgabe der Lösungen von Teil 1 ausgehändigt.

Aufgabe 2 - Vektorgeometrie

Gegeben sind die drei Punkte $A(1|-1|1)$, $B(-1|0|3)$ und $D(3|1|2)$.

a) Zeigen Sie, dass es möglich ist, dass diese drei Punkte die Ecken eines Quadrates $ABCD$ sind und berechnen Sie die Koordinaten der fehlenden Ecke C. (2.5 P.)

b) Das Quadrat $ABCD$ soll nun zu einem Würfel ergänzt werden, wobei die Ecke E auf dem Lot zur Ebene $ABCD$ durch A liege und die Vektoren $\vec{AD}$. $\vec{AB}$ und $\vec{AE}$ in dieser Reihenfolge ein Linkssystem bilden sollen. Berechnen Sie die Koordinaten dieser Ecke E. (2.5 P.)

c) Die Ecken $ABCDE$ bilden eine Pyramide. Man berechne die Gleichung derjenigen Parallelebene zu E_{ABD}, welche das Volumen dieser Pyramide halbiert. (3 P.)

Aufgabe 3 - Funktionendiskussion

Gegeben ist die Funktion $f_t(x) = -tx + e^{-x}$ mit dem Parameter $t \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich D_{f_t}. (0.5 P.)

b) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion für $|x| \to \infty$. Die Verwendung des CAS in dieser Teilaufgabe ist nicht zugelassen. (2 P.)

c) Im folgenden betrachten wir Extremal- und Wendepunkte. Die Verwendung des CAS in dieser Teilaufgabe ist nicht zugelassen.

   i) Beweisen Sie, dass der Punkt $T(-\ln(-t) \mid t \cdot [\ln(-t) - 1])$ der einzige Extremalpunkt von $f_t(x)$ ist und bestimmen Sie, in Abhängigkeit des Parameters t, ob es sich dabei um ein Minimum oder ein Maximum handelt. (2.5 P.)

   ii) Untersuchen Sie den Funktionsgraphen auf sein Krümmungsverhalten. Gibt es Wendepunkte? (1 P.)

   iii) Für welchen Wert von t liegt das Minimum auf der x-Achse? (1 P.)

   iv) Bestimmen Sie die Gleichung der Kurve, auf welcher sich das Minimum in Abhängigkeit des Parameters t bewegt. (2 P.)

d) Der Graph von $f_t(x)$ hat je nach Wert von t unterschiedlich viele Nullstellen. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen in Abhängigkeit des Parameters t. (4 P.)

   Hinweis: Die Nullstellengleichung kann algebraisch nicht gelöst werden. Dennoch ist es möglich in einem ersten Schritt mit Hilfe das CAS-Rechners zu beobachten, in einem zweiten Schritt mit den zur Verfügung stehenden Mitteln das Beobachtete stichhaltig zu begründen.

Aufgabe 4 - Komplexe Zahlen

Die Verwendung des CAS ist in der ganzen Aufgabe 4 nicht zugelassen.

i) Es sei $f(z) = z^3 - 12z^2 + az + b = 0$ ($z \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$). Die Zahl $z_1 = 1 + 3i$ sei eine Lösung dieser Gleichung. Bestimmen Sie die Parameter a und b. (3 P.)

ii) Wir betrachten eine andere Gleichung $g(z) = z^3 - 7z^2 + 20z - 50 = 0$, ($z \in \mathbb{C}$), welche eine Lösung $z = 5$ hat. Bestimmen Sie alle anderen Lösungen. (3 P.)

Aufgabe 5 - Stochastik

Die Teilaufgaben sind voneinander unabhängig.

a) i) In einem Regal stehen fünf französische, sieben spanische und elf englische Bücher. Auf wie viele Arten lassen sich zwei Bücher verschiedener Sprache auswählen? (1.5 P.)

ii) Auf wie viele Arten lassen sich die Bücher im Regal einordnen, wenn die Bücher gleicher Sprachen nebeneinander stehen sollen? (1.5 P.)

b) Eine Klasse besteht aus 10 Schülerinnen und 14 Schülern. Durch das Los werden 5 Personen aus dieser Klasse ausgewählt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass

i) alle 5 ausgewählten Personen Schülerinnen sind, (1 P.)

ii) in der genannten Auswahl mindestens 3 Schülerinnen sind? (1.5 P.)

c) Man würfelt mit einem Würfel so lange, bis eine 6 erscheint, höchstens aber sechsmal. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Würfe an.

i) Erstellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsvariable X. (2 P.)

ii) Wie oft wird man durchschnittlich würfeln? (1.5 P.)

d) Ein Test für den Nachweis eines viralen Erregers hat folgende Kenndaten:

- Sensitivität: 98% der tatsächlich positiven Testpersonen erhalten ein positives Testresultat.
- Spezifität: 99% der tatsächlich gesunden Testpersonen werden auch als gesund erkannt, erhalten also ein negatives Testresultat.

Wir nehmen an die Prävalenz, also der Anteil Erkrankter in der gesamten Bevölkerung zu einem bestimmten Zeitpunkt sei 4%. Es wird zufällig im grossen Stil auf die Krankheit getestet. Person A erhält einen positiven Befund.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist Person A tatsächlich positiv? (2.5 P.)

Viel Erfolg wünscht Ihnen Dr. Christian Freiburghaus.