Maturité 2021 – Examen écrit de mathématiques

Classes : 4B, 4Be, 4BW, 4GLW, 4KSW, <u>4M</u>, 4S, <u>4SI</u>, 4W, 4Z

Enseignants : BoJ, BtT, HnR, HrP, KiA, MoM, <u>PeM</u>, RoL, SuF

Durée de l'examen :	4 heures
Remarque :	Commencer chaque exercice sur une nouvelle feuille.
Ressources autorisées :	Calculatrice TI-$n$spire CX, en mode *Press-to-Test*
	Formulaire (*Fundamentum Mathematik und Physik*), sans annotations
	Dictionnaire français-allemand

Lorsqu'il est demandé de résoudre un exercice **à la main**, seules les fonctionnalités élémentaires de la calculatrice sont autorisées. Pour obtenir la totalité des points dans ce cas, il faudra travailler **sans** utiliser les fonctions telles que *dotP*, *crossP*, *nSolve*, *polyRoots*, ainsi que le calcul numérique de dérivées ou d'intégrales.
Les calculs des questions précédées du symbole ✍ devront ainsi être faits **à la main**.
La fenêtre graphique se limite quant à elle à la simple visualisation des graphes de fonctions.

Exercice 1 : Géométrie vectorielle

On considère les trois points $A(5|8|6)$, $B(7|9|8)$, $C(9|-5|13)$ et le plan $\Pi_1 : 2x - 3y - z = 4$.

✍ (a) Monter que le triangle ABC est rectangle en B. (1,5 P.)

(b) Calculer les coordonnées du point D pour que $ABCD$ soit un rectangle. (1,5 P.)

(c) Déterminer une équation cartésienne du plan Π_2 qui contient le rectangle. (2 P.)

Si aucune équation du plan Π_2 n'a été trouvée, on utilisera pour la suite l'équation de remplacement $\Pi_2 : -22x + 4y + 20z = 42$.

(d) Calculer l'angle formé par les deux plans Π_1 et Π_2. (1,5 P.)

(e) Une source lumineuse, située en un point P, envoie des rayons de lumière dans toutes les directions. Cette source lumineuse éclaire le rectangle $ABCD$, ce qui produit une ombre (*Schatten*) sur le plan xy. Cette ombre a pour sommets A', B', C' et D'. On donne $A'(3|4|0)$ et $B'\left(5\left|\frac{7}{2}\right|0\right)$.
Calculer les coordonnées du point P. (3 P.)

Si le point P n'a pas été trouvé, on utilisera le point de remplacement $P'(-1|-4|-12)$ pour la suite.

(f) On considère la pyramide ayant pour base le rectangle $ABCD$ et pour sommet le point P. On sait que le produit mixte $\left(V = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AP}\right)$ permet de calculer relativement facilement le volume de la pyramide.
Calculer le volume de la pyramide en utilisant une autre méthode. (2,5 P.)

Exercice 2 : Analyse

Soit f la fonction polynomiale donnée par l'expression :

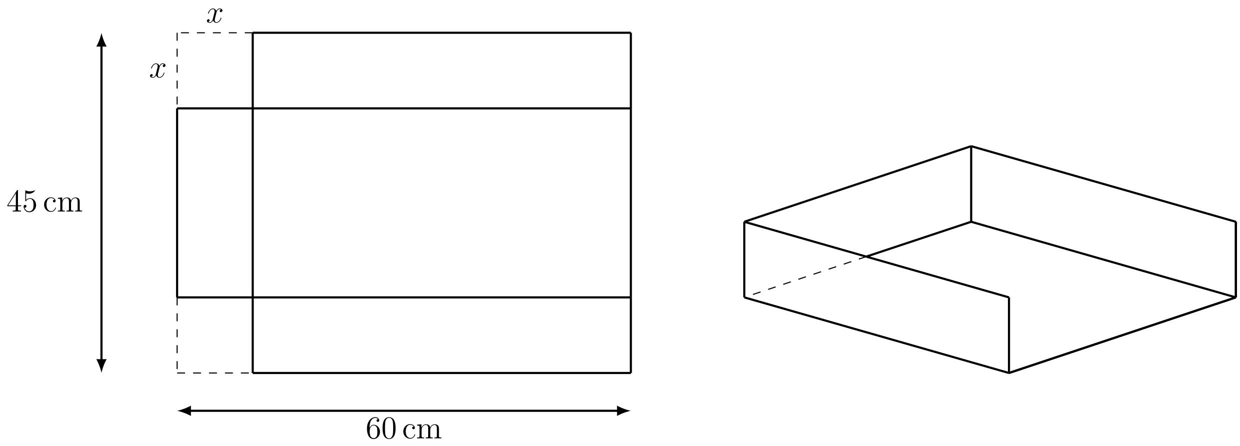
$$f(x) = 2x^3 - 165x^2 + 2700x$$

On note G_f le graphe de f.

(a) Déterminer les abscisses x de tous les points extremums de G_f. Il n'est pas demandé de préciser si ces points sont des points maximums ou minimums. (1 P.)

(b) Déterminer les abscisses x de tous les points d'inflexion de G_f. (1 P.)

(c) Une pelle (*Schaufel*) doit être construite à partir d'une plaque métallique rectangulaire de dimensions $60\,\mathrm{cm} \times 45\,\mathrm{cm}$. On découpe sur cette plaque deux petits carrés de $x\,\mathrm{cm}$ de côté. La partie restante est alors pliée comme le montre la figure ci-dessous, pour former finalement la pelle.



(i) Montrer que la fonction f définie ci-dessus décrit le volume de la pelle en cm^3, en fonction de x. (1,5 P.)

(ii) À quel intervalle doit appartenir x pour que ce volume existe ? (0,5 P.)

(iii) Calculer les dimensions (longueur, largeur et hauteur) de la pelle ayant un volume maximal puis donner la valeur de ce volume maximal. (2 P.)

(d) En guise d'introduction au concept d'optimisation, un professeur montre à ses élèves différentes pelles, toutes construites avec une plaque de métal selon la méthode décrite en (c), mais pour différentes valeurs de x.

Un centimètre carré de plaque de métal a une masse de $2\,\mathrm{g}$.

Les élèves sont alors invités à mesurer sur les différentes pelles la *hauteur* en centimètres, le *volume* en litres et la *masse* en kilogrammes. Toutes les mesures sont notées avec trois chiffres après la virgule.

(i) La pelle de Petra a une masse de $5{,}076\,\mathrm{kg}$. Calculer son volume. (2 P.)

(ii) **L'utilisation de la calculatrice est recommandée pour cette question.**
Les pelles de Marc et de Céline ont le même volume, bien que la pelle de Marc soit $9\,\mathrm{cm}$ plus haute que celle de Céline. Quel est le volume de la pelle de Céline ? (2 P.)

Exercice 3 : Analyse

On considère les deux fonctions g et h données par les expressions

$$g(x) = \left(3x - x^2\right) \cdot \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad h(x) = 2 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2 + 18 \cdot x \quad \text{pour } x \in \mathbb{R},$$

où e est le nombre d'Euler.

✍(a) Déterminer tous les zéros de g. (1,5 P.)

✍(b) Montrer que $G(x) = (5x - 5 - x^2) \cdot \mathrm{e}^x$ est l'expression d'une primitive de g. (1,5 P.)

✍(c) Calculer l'aire **exacte** de la surface fermée située dans le premier quadrant :

(i) Délimitée par le graphe de h et l'axe x ; (3 P.)

(ii) Délimitée par le graphe de g et l'axe x. (1 P.)

(d) Calculer une valeur approchée de l'aire de la surface délimitée **en totalité** par les graphes de h et de g. (1,5 P.)

(e) Une troisième fonction w est définie de la façon suivante :

$$w(x) = k \cdot h(x) \text{ , où } k \text{ est un nombre réel.}$$

Déterminer la valeur de k pour laquelle le point d'inflexion du graphe de w se trouve également sur le graphe de g. (3 P.)

Exercice 4 : Combinatoire et probabilité

Bilbo le Hobbit et Gandalf le magicien (*Zauberer*) attendent la visite de 9 nains de sexe masculin et 4 nains de sexe féminin (*männlichen/weiblichen Zwergen*) qui sont les représentants de leur peuple.

1. Les 13 nains arrivent l'un après l'autre.
   - (a) Quelle est la probabilité que les trois premiers nains soient de sexe féminin ? (1 P.)
   - (b) Sur les trois premiers nains, quelle est la probabilité qu'au moins deux soient de sexe masculin ? (1 P.)

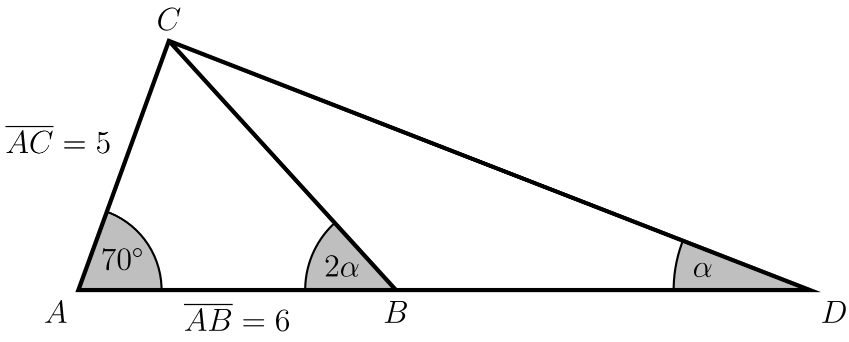
2. Après un certain temps, Gandalf commence à s'ennuyer. Il connaît les noms des 13 nains et il prétend (*behauptet*) qu'il peut deviner les noms des quatre premiers invités dans le bon ordre (sans utiliser de magie).
   - (a) Quelle est la probabilité que Gandalf devine les quatre noms dans le bon ordre ? (1 P.)
   - (b) Quelle est la probabilité que Gandalf devine les quatre noms, mais pas nécessairement dans le bon ordre ? (1 P.)

3. Après une campagne « anti-tabac », la quantité de fumeurs (*Raucher*) chez le peuple nain a diminué pour atteindre une proportion de 55 %. Gandalf et Bilbo ne savent cependant pas si leurs invités nains sont fumeurs ou pas.
   - (a) Quelle est la probabilité qu'aucun des 13 invités nains ne fume ? (1 P.)
   - (b) Quelle est la probabilité qu'au moins deux invités soient non-fumeurs ? (1 P.)
   - ✍(c) Combien de nains Bilbo et Gandalf devraient-ils inviter (au hasard) pour que la probabilité d'avoir au moins un fumeur soit supérieure à 99,99 % ? (2,5 P.)
   - (d) Dans tout le peuple nain, 60 % sont de sexe masculin. Parmi les nains de sexe féminin, 64 % sont fumeurs. Quelle est la probabilité (arrondie au pourcentage entier) qu'un nain fumeur choisi au hasard soit de sexe masculin ? (1,5 P.)

✍4. La probabilité p qu'un nain ait les cheveux bouclés (*lockige Haare*) est inconnue. Mais Gandalf a une inspiration : la probabilité qu'exactement un des deux premiers invités ait les cheveux bouclés est exactement de $45{,}5\,\%$. Construire un diagramme en arbre précis de cette situation, pour établir une équation et déterminer ainsi la valeur de p. (2 P.)

Exercice 5.1 : Trigonométrie

On considère la figure ci-dessous. Calculer $\overline{BC}$, α et $\overline{CD}$. (3 P.)



Exercice 5.2 : Mousse et verre à bière

Une étude a montré que la mousse de bière (*Bierschaum*) disparaît selon une loi exponentielle et que la constante de décroissance (*Zerfallskonstante*) dépend du type de bière.
La hauteur en cm de la mousse d'une **bière blonde** dans un récipient (*Gefäss*) cylindrique est décrite par la formule suivante :

$$h(t) = h_0 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}2t}$$

où h_0 est la hauteur initiale de la mousse, t le temps en secondes et e le nombre d'Euler.

✍(a) Juste après avoir versé la bière blonde dans un récipient cylindrique, la hauteur de la mousse est de $10\,\mathrm{cm}$. Quelle est la hauteur de la mousse après 8 secondes ? Arrondir le résultat au centimètre. (1 P.)

✍(b) Dans un bar, on sert une bière blonde avec une hauteur de mousse de $3\,\mathrm{cm}$. Combien de temps faut-il attendre pour boire la bière avec une hauteur de mousse de $1\,\mathrm{cm}$ seulement ? Donner la solution **exacte**. (1,5 P.)

(c) La hauteur de la mousse d'une **bière blanche** est décrite par cette autre formule :

$$w(t) = w_0 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}3t}$$

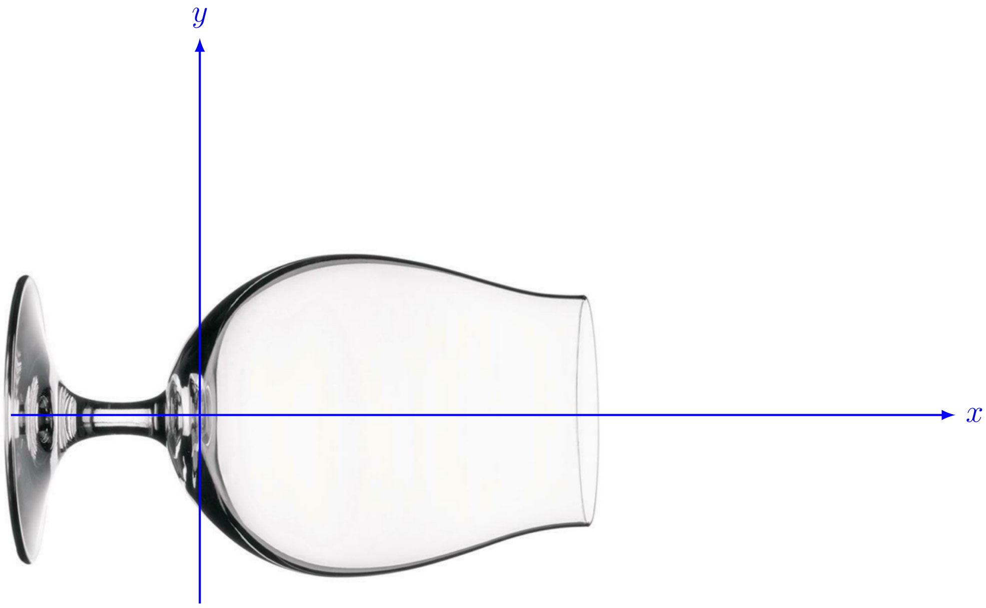
Une bière blonde et une bière blanche sont versées simultanément dans deux récipients cylindriques. On obtient alors au départ $5\,\mathrm{cm}$ de mousse pour la bière blonde et $10\,\mathrm{cm}$ pour la bière blanche. Après combien de temps les hauteurs de mousse des deux bières seront-elles égales ? Arrondir le résultat à deux chiffres après la virgule. (1,5 P.)

✍(d) La bière belge se déguste idéalement dans une coupe de forme arrondie (*in einem rundlichen Kelch*).

L'entreprise *Glass4you* a développé un verre en utilisant la fonction f donnée par l'expression :

$$f(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x} \cdot (12 - x)$$

En effet, la révolution (la rotation) du graphe de f autour de l'axe x sur l'intervalle $[\,0\,;8\,]$ engendre la forme idéale. [1 unité = 1 cm]



Quel volume de bière (en dl) ce verre peut-il contenir ? (2,5 P.)