Maturitätsprüfungen 2021 – Mathematik schriftlich

Klassen: 4B, 4Be, 4BW, 4GLW, 4KSW, 4M, 4S, 4SI, 4W, 4Z
Lehrpersonen: BoJ, BtT, HnR, HrP, KiA, MoM, PeM, RoL, SuF

Bemerkungen:	Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden.
	Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt!
Hilfsmittel:	Taschenrechner TI-*n*spire CX im Press-to-Test-Modus
	Formelsammlung *Fundamentum Mathematik und Physik*, ohne Notizen

In denjenigen Teilaufgaben, die **von Hand** gelöst werden müssen, sind nur die einfachen Funktionen Ihres Taschenrechners erlaubt. Um die volle Punktzahl für die jeweilige Teilaufgabe zu erhalten, müssen Sie in diesen Fällen auf Befehle wie dotP, crossP, nSolve, polyRoots etc. oder das numerische Berechnen von Ableitungen und Integralen verzichten.
Die Teilaufgaben, die man in diesem Sinn **von Hand** lösen muss, werden mit dem Symbol ✍ gekennzeichnet.
Im Allgemeinen beschränkt sich die Benutzung des Graphikfensters auf die Visualisierung von Funktionen.

Aufgabe 1: Vektorgeometrie

Gegeben sind die Punkte $A(5|8|6)$, $B(7|9|8)$, $C(9|-5|13)$ und die Ebene $E_1 : 2x - 3y - z = 4$.

✍ (a) Zeigen Sie, dass der Winkel des Dreiecks ABC in der Ecke beim Punkt B 90° beträgt. (1.5 P.)

(b) Finden Sie den Punkt D, so dass $ABCD$ ein Rechteck ist. (1.5 P.)

(c) Berechnen Sie die Koordinatenform der Ebenengleichung E_2, in der das Rechteck liegt. (2 P.)

Falls Sie die Ebenengleichung nicht bestimmen können, so können Sie ab hier mit der Ersatzebene $E_2 : -22x + 4y + 20z = 42$ rechnen.

(d) Berechnen Sie den Winkel zwischen den beiden Ebenen E_1 und E_2. (1.5 P.)

(e) Im Punkt P befindet sich eine punktförmige Lichtquelle, die in alle Richtungen Licht aussendet, welches sich geradlinig ausbreitet. Diese Lichtquelle beleuchtet das Rechteck $ABCD$, welches dadurch einen Schatten auf die xy-Ebene wirft. A', B', C' und D' seien die Eckpunkte der Schattenfigur. $A'(3|4|0)$ und $B'\left(5\,\middle|\,\frac{7}{2}\,\middle|\,0\right)$ seien gegeben. Bestimmen Sie die Koordinaten der Lichtquelle. (3 P.)

Falls Sie den Punkt P der Lichtquelle nicht gefunden haben, so dürfen Sie in f) mit den folgenden (falschen) Koordinaten für $P'(-1|-4|-12)$ rechnen.

(f) Das Rechteck $ABCD$ als Grundfläche und die Lichtquelle P als Spitze bilden eine Pyramide. Mit Hilfe des Spatproduktes $\left(V = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AP}\right)$ könnte man relativ einfach das Volumen der Pyramide bestimmen. Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide mit einer alternativen Methode. (2.5 P.)

Aufgabe 2: Analysis

Gegeben ist die Polynomfunktion f mit der Gleichung:

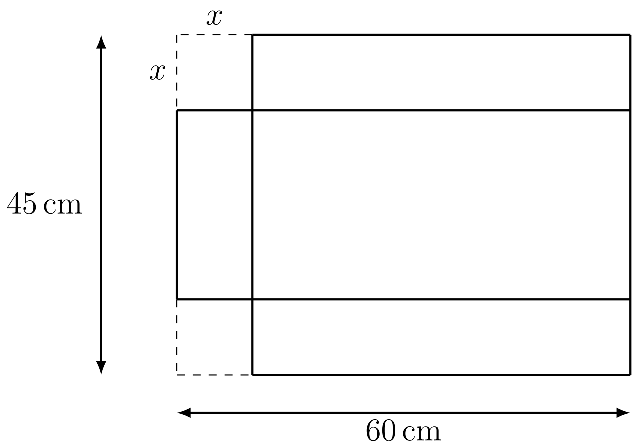
$$f(x) = 2 \cdot x^3 - 165 \cdot x^2 + 2700 \cdot x$$

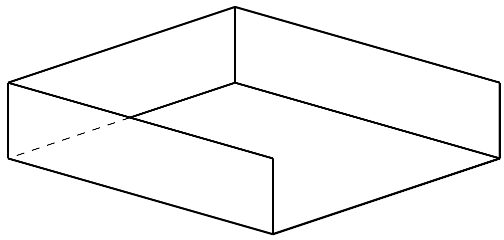
Wir bezeichnen den Graphen von f mit G_f.

(a) Finden Sie die x-Koordinaten aller Extrempunkte von G_f. Ein Nachweis, ob es sich um einen Hoch- oder Tiefpunkt handelt, ist nicht erforderlich. (1 P.)

(b) Finden Sie die x-Koordinaten aller Wendepunkte von G_f. (1 P.)

(c) Eine Schaufel soll konstruiert werden, indem Quadrate mit der Seitenlänge $x\,\mathrm{cm}$ aus den Ecken eines rechteckigen Blechs (60$x\,\mathrm{cm}$ $\times$ 45$x\,\mathrm{cm}$) ausgeschnitten und das verbleibende Blechstück anschliessend wie gezeigt gebogen wird.





(i) Zeigen Sie, dass die oben betrachtete Funktion f das Volumen (Fassungsvermögen) der Schaufel in cm^3 in Abhängigkeit der Seitenlänge x beschreibt. (1.5 P.)

(ii) Geben Sie das Intervall der für die Teilaufgabe (c)(i) sinnvollen x-Werte an. (0.5 P.)

✍(iii) Berechnen Sie die Dimensionen (Länge, Breite und Höhe) der Schaufel mit maximalem Volumen und geben Sie dieses maximale Volumen an. (2 P.)

(d) Als Einführungsübung zum Thema der Optimierung werden einer Schulklasse verschiedene Schaufeln gezeigt, welche mittels der in Teilaufgabe (c) beschriebenen Methode - ebenfalls durch Ausschneiden von Quadraten und Biegen aus einem $60\,\mathrm{cm} \times 45\,\mathrm{cm}$ Blechstück - konstruiert wurden.

Ein Quadratzentimeter des verwendeten Blechs wiegt $2\,\mathrm{g}$.

Die Schüler*innen werden aufgefordert, ihre jeweiligen Schaufeln zu messen und die *Höhe* in Zentimeter, das *Volumen* in Liter und die *Masse* in Kilogramm zu notieren. Alle Daten werden mit drei Nachkommastellen notiert.

(i) Petras Schaufel hat eine Masse von $5.076\,\mathrm{kg}$. Wie gross ist das Volumen? (2 P.)

(ii) **Für diese Teilfrage ist die Benutzung des Taschenrechners empfohlen.**
Die Schaufeln von Mark und Céline haben das gleiche Volumen, wobei aber Marks Schaufel $9\,\mathrm{cm}$ höher ist als Célines. Wie gross ist das Volumen von Célines Schaufel? (2 P.)

Aufgabe 3: Analysis

Gegeben sind die beiden Funktionen g und h mit

$$g(x) = \left(3 \cdot x - x^2\right) \cdot \mathrm{e}^x \quad \text{und} \quad h(x) = 2 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2 + 18 \cdot x \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

wobei e die Eulersche Zahl bezeichnet.

✍ (a) Finden Sie alle Nullstellen der Funktion g. (1.5 P.)

✍ (b) Zeigen Sie, dass $G(x) = \left(5 \cdot x - 5 - x^2\right) \cdot \mathrm{e}^x$ die Gleichung einer Stammfunktion von g ist. (1.5 P.)

✍ (c) Berechnen Sie die **exakten** Flächeninhalte der wie folgt begrenzten Flächen im ersten Quadranten:

(i) durch den Graphen von h und die x-Achse. (3 P.)

(ii) durch den Graphen von g und die x-Achse. (1 P.)

(d) Berechnen Sie einen **gerundeten** Wert für den Inhalt der **gesamten** von den Graphen von h und g begrenzten Fläche. (1.5 P.)

(e) Eine dritte Funktion w sei wie folgt definiert:

$$w(x) = k \cdot h(x) \text{ , wobei } k \text{ eine reelle Konstante bezeichne}$$

Finden Sie den Wert für k so, dass der Wendepunkt des Graphen von w auch auf dem Graphen von g liegt. (3 P.)

Aufgabe 4: Stochastik

Bilbo der Hobbit und Gandalf der Zauberer erwarten Besuch von 9 männlichen und 4 weiblichen Zwergen, den Anführern ihres Volkes.

1. Die 13 Zwerge treffen einer nach dem andern ein.
   (a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten drei eintreffenden Zwerge weiblich sind? (1 P.)
   (b) Wie wahrscheinlich ist es, dass unter den ersten drei eintreffenden Zwergen mindestens zwei männlich sind? (1 P.)

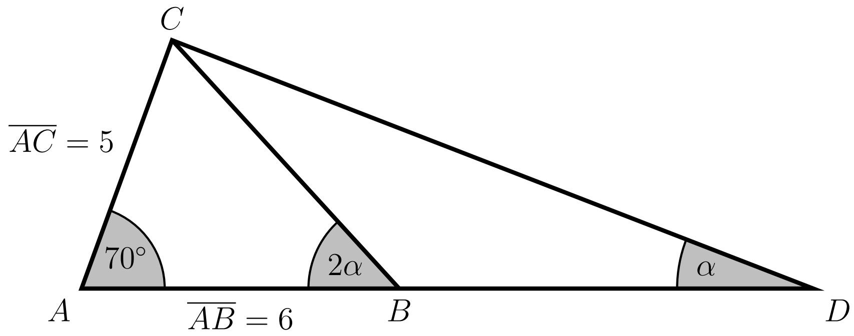
2. Nach einigem Warten wird es Gandalf langweilig und er behauptet, er könne die genaue Reihenfolge der Namen der ersten vier Gäste erraten (ohne Einsatz von Magie). Gandalf kennt die Namen der 13 Zwerge.
   (a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Gandalf alle vier Namen in der richtigen Reihenfolge rät? (1 P.)
   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit rät er zwar alle vier Namen richtig, aber nicht notwendigerweise in der richtigen Reihenfolge? (1 P.)

3. Nach intensiven Aufklärungskampagnen hat sich der Anteil der Raucher unter dem Volk der Zwergen auf 55% reduziert. Gandalf und Bilbo wissen anfangs nichts über die diesbezüglichen Vorlieben ihrer Gäste.
   (a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keiner der dreizehn Gäste raucht? (1 P.)
   (b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es mindestens zwei Nichtraucher hat? (1 P.)
   ✍(c) Wie viele Zwerge müssten Bilbo und Gandalf im Minimum einladen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99.99% einen oder mehr Raucher darunter zu finden? (2.5 P.)
   (d) 60% aller Zwerge sind männlich. Der Anteil der Raucherinnen unter den weiblichen Zwergen beträgt 64%. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit (auf ganze Prozent gerundet), dass ein zufällig ausgewählter rauchender Zwerg männlich ist? (1.5 P.)

✍4. Die Wahrscheinlichkeit p, dass ein Zwerg lockige Haare hat, ist unbekannt. Nun hat Gandalf die Eingebung, dass die Wahrscheinlichkeit, dass genau einer der ersten beiden eintreffenden Zwerge Locken hat, genau 45.5% ist. Wie gross müsste p sein, damit Gandalfs Eingebung zutrifft? Erstellen Sie ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm für das Problem, stellen Sie eine Gleichung für p auf und lösen Sie diese. (2 P.)

Aufgabe 5.1: Trigonometrie

Gegeben ist die untenstehende Figur. Berechnen Sie $\overline{BC}$, α und $\overline{CD}$. (3 P.)



Aufgabe 5.2: Bierschaum und Bierglas

In einer Studie konnte man nachweisen, dass der Bierschaum exponentiell zerfällt und dass die Zerfallskonstante bei unterschiedlichen Biersorten verschieden ist. Die Höhe in cm der Schaumkrone eines **hellen Biers** in einem zylindrischen Gefäss lässt sich mit der folgenden Formel bestimmen,

$$h(t) = h_0 \cdot \mathrm{e}^{-0.2t}$$

wobei h_0 die Anfangshöhe ist, die Zeit t in Sekunden angegeben ist und e die Eulersche Zahl bezeichnet.

✍(a) In einem zylindrischen Gefäss wird der Zerfall von Schaum eines hellen Biers untersucht. Nach dem Einschenken entsteht eine $10\,\mathrm{cm}$ hohe Schaumkrone. Wie hoch ist sie nach 8 Sekunden? Runden Sie auf ganze Zentimeter. (1 P.)

✍(b) An einer Bar wird ein helles Bier mit einer $3\,\mathrm{cm}$ hohen Schaumkrone serviert. Wie lange muss man warten, wenn man Bier mit einer Schaumkrone von nur $1\,\mathrm{cm}$ trinken will? Geben Sie die **exakte** Lösung an. (1.5 P.)

(c) Die Höhe der Schaumkrone eines **weissen Biers** lässt sich mit der folgenden Formel bestimmen,

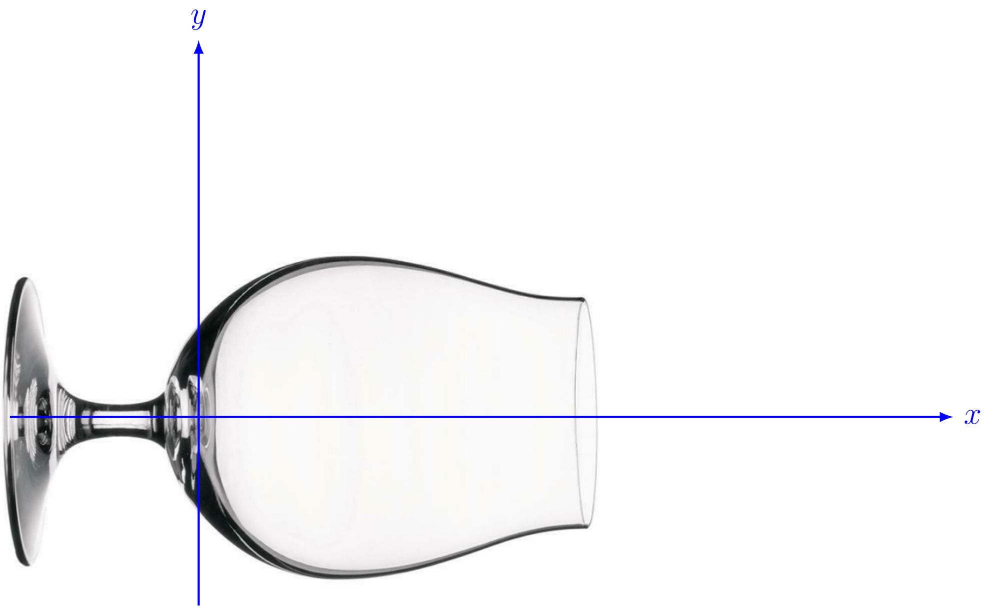
$$w(t) = w_0 \cdot \mathrm{e}^{-0.3t}$$

Ein helles und ein weisses Bier werden gleichzeitig in zwei verschiedene zylindrische Gefässe gezapft. Aus dem hellen Bier entstehen $5\,\mathrm{cm}$ Bierschaum. Aus dem weissen Bier entstehen $10\,\mathrm{cm}$ Bierschaum. Wann werden die Bierschäume gleich hoch sein? Runden Sie auf zwei Nachkommastellen. (1.5 P.)

✍(d) Belgisches Bier soll man am besten in einem rundlichen Kelch degustieren. Die Firma *Glass4you* hat folgendes entdeckt: Lässt man die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x}(12 - x)$$

um die x-Achse im Intervall $[0, 8]$ rotieren, so entsteht ein Kelch, der zur Verkostung belgischer Biere perfekt passt. [1 Einheit = 1cm]



Wie viel dl Bier passen in einen solchen Kelch? (2.5 P.)