gymnasiumliestal

Maturité 2018 – Examen écrit de mathématiques

Classes : 4IW, 4SW (bilingue français)

Durée de l'examen :	4 heures
Remarque :	Commencer chaque exercice sur une nouvelle feuille.
Ressources autorisées :	Calculatrice TI-$n$spire CX, en mode *Press-to-Test*
	Formulaire (*Fundamentum Mathematik und Physik*), sans annotations
	Dictionnaire français-allemand

Pour les exercices qui doivent être résolus **à la main**, seules les fonctionnalités simples de la calculatrice sont autorisées. Pour obtenir la totalité des points de ces exercices, il faudra travailler **sans** utiliser les fonctions telles que *nSolve*, *polyRoots*, ainsi que le calcul numérique de dérivées ou d'intégrales.
La fenêtre graphique se limite quant à elle à la simple visualisation des graphes de fonctions.

Exercice 1 : Calcul différentiel et intégral

On considère la fonction polynomiale suivante :

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x^2 + 10$$

On appelle I le point d'inflexion du graphe de f.

(a) Calculer **à la main** les coordonnées du point I. (2,5 P.)

(b) Déterminer une équation de la tangente au graphe de f en I. (1,5 P.)

(c) La parabole d'équation $p(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{7}{2}$ coupe le graphe de f en I. Calculer l'angle formé par les deux graphes en ce point. (2 P.)

(d) La parabole d'équation $q(x) = -x^2 + x + 10$ coupe également le graphe de f en I, et en deux autres points. Calculer **à la main** l'aire de la surface délimitée par cette parabole et le graphe de f. (3 P.)

(e) Le graphe d'une fonction polynomiale de degré 4, symétrique par rapport à l'axe y, coupe l'axe y en $y = 10$ et est tangent au graphe de f en $x = 9$.
Déterminer l'expression de cette fonction. (3 P.)

Exercice 2 : Calcul différentiel et intégral

Soit la fonction rationnelle g définie par :

$$g(x) = \frac{20x - 40}{x^3}$$

(a) Calculer les zéros de g puis déterminer les équations de toutes les asymptotes au graphe de g. (2 P.)

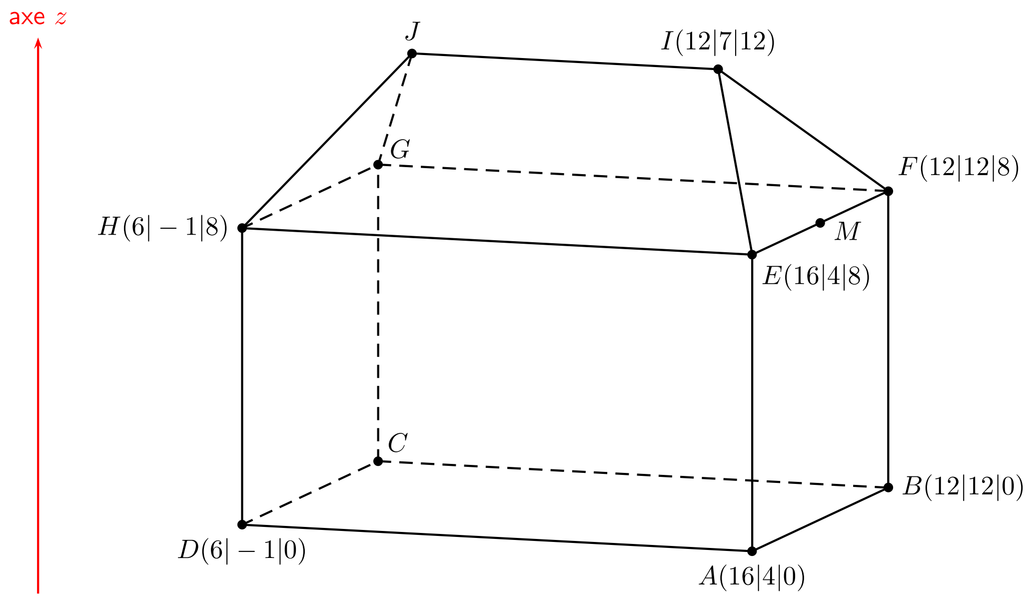
(b) Les calculs de cette question doivent être faits **à la main**.
Calculer les coordonnées du point extremum du graphe de g, et déterminer s'il s'agit d'un point minimum ou d'un point maximum. (3 P.)

(c) Calculer l'aire A_k de la surface délimitée dans le 1er quadrant par le graphe de g, l'axe x et la droite verticale d'équation $x = k$, où $k > 2$.
Vers quelle valeur tend l'aire A_k lorsque $k \to +\infty$? (3 P.)

(d) Le point $P(u|v)$, avec $u > 2$, se trouve sur le graphe de g. Les points $N(2|0)$, $Q(u|0)$ et $P(u|v)$ définissent un triangle.
Faire un schéma de la situation ! Calculer **à la main** l'abscisse u pour laquelle l'aire du triangle NQP est maximale. (4 P.)

Exercice 3 : Géométrie vectorielle

Le schéma d'une maison individuelle en bois est donné ci-dessous. La maison est composée d'un parallélépipède rectangle (*Quader*) surmonté d'un toit à 4 pans (*Walmdach*). Le toit est composé d'un faîte (*Dachfirst*) horizontal $\overline{JI}$, où se rejoignent deux trapèzes identiques. Il est également composé, sur les côtés, de deux triangles isocèles, également identiques. Le plancher (*Boden*) de la maison se trouve dans le plan xy.
Pour simplifier la situation, l'épaisseur des poutres en bois (*Holzbalken*) sera négligée.



(a) Le point M se trouve au milieu du segment $\overline{EF}$. Déterminer les coordonnées des points C, M et J. (3,5 P.)

(b) Déterminer une équation cartésienne du plan qui contient le trapèze $HEIJ$. (2 P.)

(c) Le trapèze $FGJI$ se situe dans le plan d'équation $-2x + 4y + 5z - 64 = 0$, et le triangle EIF dans le plan d'équation $8x + 4y + 5z - 184 = 0$.
Calculer l'angle formé par ce triangle et ce trapèze. (2 P.)

(d) Pour renforcer le toit, on ajoute une poutre (*Balken*) supplémentaire qui part du point M et qui arrive perpendiculairement sur la poutre $\overline{FI}$. En quel point les deux poutres se rejoignent-elles ? (2,5 P.)

(e) Un oiseau vole au-dessus du faîte $\overline{JI}$ en suivant la trajectoire définie par l'équation paramétrique suivante :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quelle est la plus petite distance entre la trajectoire de l'oiseau et la droite JI ? (2 P.)

Exercice 4 : Combinatoire et probabilité

Au printemps, Thérèse souhaite planter des tulipes (*Tulpen*) sur son balcon. Elle se rend pour cela dans une jardinerie (*Gartencenter*) qui propose une très grande quantité de bulbes de tulipes (*Tulpenzwiebeln*). La jardinerie vend des sachets (*Beutel*) qui contiennent chacun 5 bulbes de tulipes.
Les bulbes sont tous identiques (même forme, même taille, même couleur...). En moyenne, 50 % des bulbes produisent des tulipes rouges, 30 % des tulipes jaunes et 20 % des tulipes blanches.

(a) Thérèse souhaite acheter un sachet de 5 bulbes de tulipes. Calculer la probabilité :

   i. Qu'aucun bulbe du sachet ne produise de tulipe blanche ; (1 P.)

   ii. Qu'exactement un bulbe produise une tulipe rouge ; (1 P.)

   iii. Qu'au moins deux bulbes produisent des tulipes jaunes ; (1,5 P.)

   iv. Que les tulipes obtenues soient toutes de la même couleur. (1,5 P.)

(b) Après une longue réflexion, Thérèse change d'avis et achète deux sachets.
Il y a 14 sachets disponibles à la jardinerie. Combien de paires différentes de sachets peut-elle choisir ? (1 P.)

(c) De retour chez elle, Thérèse plante (*pflanzt*) et arrose (*giesst*) ses dix bulbes. Finalement, sept tulipes rouges, deux tulipes jaunes et une tulipe blanche sont apparues.

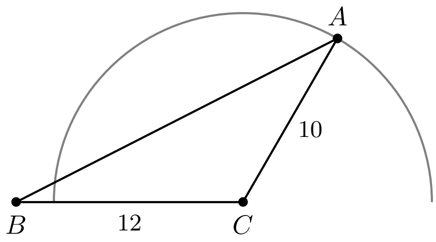
   i. Sur son balcon, Thérèse souhaite disposer les dix fleurs sur une rangée (en ligne). Combien de possibilités a-t-elle, si la rangée doit commencer et se terminer par une tulipe rouge ? (1,5 P.)

   ii. Thérèse place donc une tulipe rouge à chaque extrémité de la rangée. Les huit autres tulipes sont placées aléatoirement entre ces deux tulipes rouges.
   Calculer la probabilité que les deux tulipes jaunes soient l'une à côté de l'autre. (1,5 P.)

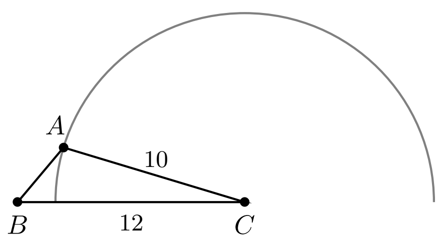
   iii. Certains bulbes de tulipes portent un gène (*Gen*) qui rend les tulipes plus résistantes au froid. On sait que 20 % des tulipes jaunes portent ce gène, alors que pour les deux autres couleurs, seules 10 % des tulipes portent ce même gène.
   Une semaine après que Thérèse a placé ses dix tulipes sur son balcon survient un épisode de froid qui détruit toutes les tulipes, sauf celles qui portent le gène de résistance au froid. Calculer la probabilité qu'exactement deux tulipes survivent à cet épisode de froid. (3 P.)

Exercice 5a : Trigonométrie

On considère un triangle ABC. Dans ce triangle, la distance entre les deux points B et C est égale à 12, et le point A se trouve sur un demi-cercle de centre C et de rayon 10. Pour chaque position du point A sur le demi-cercle, on obtient un triangle différent. Deux exemples sont représentés ci-dessous.



Exemple 1



Exemple 2

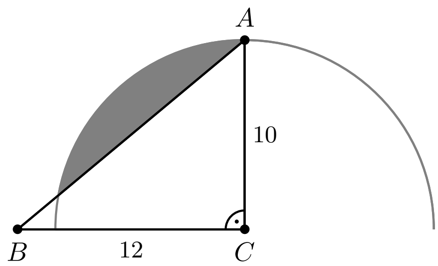
On note α, β et γ les angles intérieurs du triangle aux sommets respectifs A, B et C.

i. Dans l'exemple 1 ci-dessus, on choisit le point A pour avoir $\gamma = 120°$. Calculer la longueur $\overline{AB}$. (1 P.)

ii. Dans l'exemple 2, on a $\beta = 50°$. Calculer l'angle (obtus[1]) α. (1,5 P.)

iii. Si le point A peut se déplacer librement sur le demi-cercle, quelle est la plus grande valeur possible pour l'angle β ? (1 P.)

iv. Dans l'exemple 3 ci-dessous, on a $\gamma = 90°$.



Exemple 3

Calculer l'aire du segment circulaire, en gris. (2,5 P.)

1. *Stumpfer Winkel*

Exercice 5b : Fonction exponentielle

Jeanne observe le développement d'algues (*Algen*) à la surface d'un étang (*Teich*). Au lieu de lutter contre ces algues, elle décide d'étudier leur croissance qui peut être décrite par :

$$A(t) = \frac{12}{1 + \mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot t}}$$

$A(t)$ est l'aire, en m^2, de la surface de l'étang recouverte par les algues, t jours après leur découverte par Jeanne.

i. L'aire totale de l'étang est de 12 m^2. Quel pourcentage de l'étang est recouvert par les algues 10 jours après leur découverte ? (1 P.)

ii. Combien de jours après leur découverte les algues vont-elles couvrir 8 m^2 de l'étang ? Calculer ce nombre **à la main**. (2,5 P.)

iii. Calculer **à la main** le taux de croissance instantanée de la surface recouverte par les algues à l'instant $t = 10$. (2,5 P.)

Thomas Blott, Johannes Börlin, Roman Huber, Andreas Kilberth, Matthieu Penserini, Gérald Prétot, Silke Schewe-Uhlig, Valentina Stauber, Robyn Steiner-Curtis, Raphael Ugolini, Constantin von Weymarn et Alain Zumbiehl vous souhaitent bonne chance !