

Maturitätsprüfungen 2018 – Mathematik schriftlich

Klassen: 4Ba, 4IW (Profil W), 4KSW, 4LW (Profil W), 4M, 4S, 4SW (Profil W), 4WZ

Bemerkungen:	Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden. Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt!
Hilfsmittel:	Taschenrechner TI-nspire CX im Press-to-Test-Modus Formelsammlung <i>Fundamentum Mathematik und Physik</i> , ohne Notizen

In Aufgaben, die **von Hand** gelöst werden müssen, sind nur die einfachen Funktionen Ihres Taschenrechners erlaubt. Um die volle Punktzahl für die jeweilige Aufgabe zu bekommen, müssen Sie auf Befehle wie nSolve, polyRoots oder das numerische Berechnen von Ableitungen und Integralen verzichten.

Im Allgemeinen beschränkt sich die Benutzung des Graphikfensters auf die Visualisierung von Funktionen.

Aufgabe 1: Differential- und Integralrechnung

Gegeben ist die ganzrationale Funktion

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x^2 + 10$$

- (a) Berechnen Sie **von Hand** die Koordinaten des Wendepunktes W des Graphen von f .
(2.5 P.)
- (b) Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente.
(1.5 P.)
- (c) Der Graph der Parabel mit der Gleichung $p(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{7}{2}$ schneidet den Graphen von f im Wendepunkt W . Berechnen Sie den Schnittwinkel der beiden Graphen im Punkt W .
(2 P.)
- (d) Der Graph der Parabel $q(x) = -x^2 + x + 10$ schneidet den Graphen von f ebenfalls im Wendepunkt und zwei weiteren Punkten. Berechnen Sie **von Hand** den Inhalt der von den Graphen von q und f eingeschlossenen Fläche.
(3 P.)
- (e) Der zur y -Achse symmetrische Graph einer ganzrationalen Funktion vierten Grades schneidet die y -Achse bei $y = 10$ und berührt den Graphen von f bei $x = 9$.
Bestimmen Sie die Gleichung dieser Funktion.
(3 P.)

Aufgabe 2: Differential- und Integralrechnung

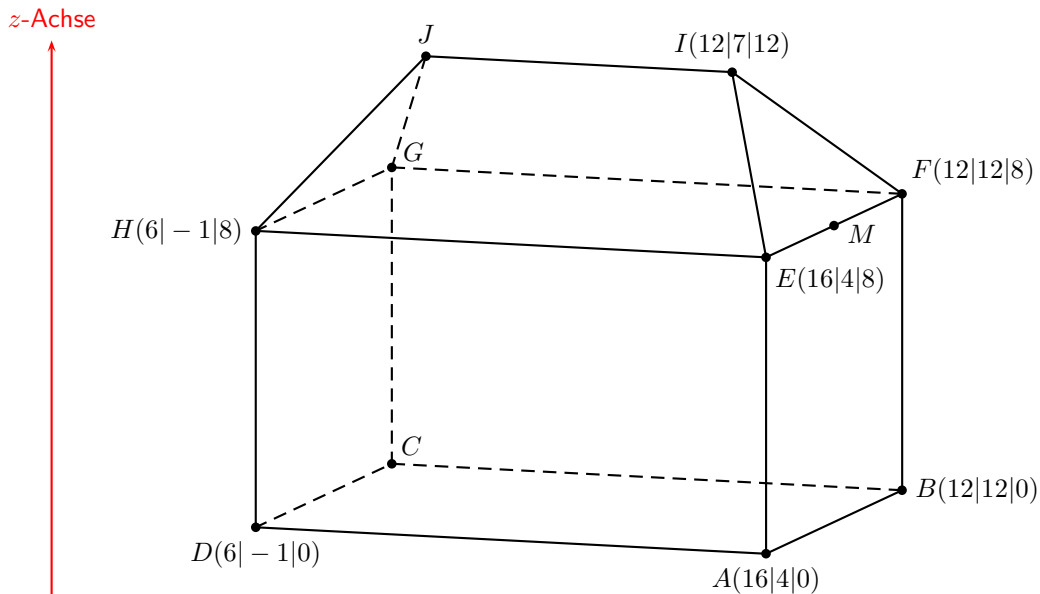
Gegeben ist die gebrochen-rationale Funktion

$$g(x) = \frac{20x - 40}{x^3}$$

- (a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion g und bestimmen Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von g . (2 P.)
- (b) Diese Teilaufgabe muss **von Hand** gelöst werden.
Berechnen Sie die Koordinaten des Extrempunktes der Funktion g und entscheiden Sie, ob es sich um einen Hoch- oder einen Tiefpunkt handelt. (3 P.)
- (c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A_k im ersten Quadranten, die begrenzt wird durch den Graphen von g , der x -Achse sowie der senkrechten Geraden $x = k$, wobei $k > 2$. Gegen welchen Wert strebt der Inhalt von A_k für $k \rightarrow \infty$? (3 P.)
- (d) Der Punkt $P(u|v)$ liegt auf dem Graphen von g , wobei $u > 2$. Die Punkte $N(2|0)$, $Q(u|0)$ und $P(u|v)$ bilden ein Dreieck. Skizzieren Sie die Situation! Bestimmen Sie **von Hand** die Koordinate u so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks maximal wird. (4 P.)

Aufgabe 3: Vektorgeometrie

Ein Einfamilienhaus aus Holz ist quaderförmig mit einem aufgesetzten Walmdach (siehe Abbildung). Das Walmdach besitzt einen horizontalen Dachfirst \overline{JI} und besteht aus zwei identischen, gleichschenkligen Dreiecken und zwei Trapezen. Der Boden des Hauses liegt in der xy -Ebene. Einfachheitshalber wird die Dicke der Holzbalken vernachlässigt.



- Welche Koordinaten haben die Punkte C , M und J ? Der Punkt M liegt in der Mitte zwischen den Punkten E und F . (3.5 P.)
- Berechnen Sie die Koordinatengleichung der Ebene, in der das Trapez $HEIJ$ liegt. (2 P.)
- Das Trapez $FGJI$ liegt in der Ebene mit der Koordinatengleichung $-2x+4y+5z-64=0$, das Dreieck EIF in der Ebene mit der Koordinatengleichung $8x+4y+5z-184=0$. Unter welchem Winkel schneiden sich die Dreiecks- und die Trapezflächen? (2 P.)
- Um die Stabilität des Daches zu erhöhen, wird ein weiterer Balken vom Punkt M bis zum Balken \overline{FI} gelegt, sodass beide Balken senkrecht aufeinander stehen. In welchem Punkt treffen sich die beiden Balken? (2.5 P.)
- Ein Vogel fliegt auf der Flugbahn mit der Parametergleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

über den Dachfirst \overline{JI} . Welchen kleinsten Abstand hat der Vogel von der Geraden, die durch J und I verläuft? (2 P.)

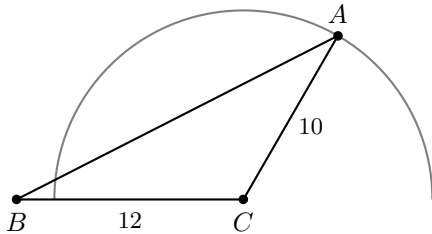
Aufgabe 4: Stochastik

Theresa möchte im Frühling Tulpen auf ihrem Balkon wachsen lassen. Sie besucht eine Gärtnerei, die eine sehr grosse Anzahl Tulpenzwiebeln anbietet. Es werden Beutel verkauft, die je fünf Zwiebeln enthalten. Die Zwiebeln sind voneinander bezüglich Form, Grösse und Farbe usw. nicht unterscheidbar. Durchschnittlich bringen 50% der Zwiebeln rote, 30% der Zwiebeln gelbe und 20% der Zwiebeln weisse Tulpen hervor.

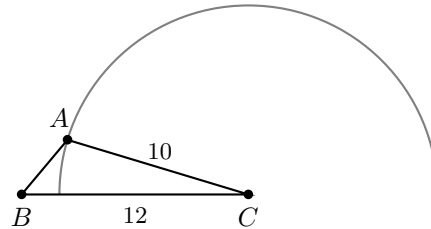
- (a) Theresa möchte einen Beutel Tulpenzwiebeln kaufen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass aus diesem Beutel
- i. keine der Zwiebeln weisse Tulpen hervorbringt. (1 P.)
 - ii. genau eine Zwiebel eine rote Tulpe hervorbringt. (1 P.)
 - iii. mindestens zwei Zwiebeln gelbe Tulpen hervorbringen. (1.5 P.)
 - iv. alle Zwiebeln Tulpen der gleiche Farbe hervorbringen. (1.5 P.)
- (b) Nach reiflicher Überlegung ändert Theresa ihren Entscheid und kauft zwei Beutel. In der Gärtnerei stehen 14 Beutel mit Zwiebeln zum Verkauf. Wie viele verschiedene Beutelpaare kann sie daraus auswählen? (1 P.)
- (c) Nachdem Theresa die zehn Zwiebeln gepflanzt und gegossen hat, erscheinen im Frühling eine weisse, zwei gelbe und sieben rote Tulpen.
- i. Theresa will sie in einer Reihe auf ihren Balkon stellen. In wie vielen verschiedenen farblichen Anordnungen kann sie die Tulpen hinstellen, wenn die Reihe mit einer roten Tulpe anfangen und enden soll? (1.5 P.)
 - ii. Theresa stellt eine rote Tulpe an den Anfang und eine rote Tulpe an das Ende der Reihe. Die anderen acht Tulpen stellt sie zufällig dazwischen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die zwei gelben Tulpen nebeneinander stehen. (1.5 P.)
 - iii. Gewisse Tulpenzwiebeln in der Gärtnerei besitzen ein Gen, das sie gegen Frost schützt. Von den Zwiebeln, die gelbe Tulpen hervorbringen, besitzen 20% dieses Gen. Von den Zwiebeln, die Tulpen der anderen zwei Farben hervorbringen, sind es 10%. Eine Woche nachdem Theresa mit der Aufstellung ihrer Tulpen fertig ist, wird ihr Balkon von starkem Frost heimgesucht. Alle Tulpen werden zerstört, ausser diejenigen, die das Gen für Frostresistenz besitzen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei von Theresas zehn Tulpen überleben. (3 P.)

Aufgabe 5a: Trigonometrie

In dieser Aufgabe betrachten wir Dreiecke ABC , bei denen die Distanz zwischen den Punkten B und C immer 12 beträgt, und der Punkt A auf einem Halbkreis mit Mittelpunkt bei C und Radius 10 liegt. Je nach Wahl der Position von A verändert sich das Dreieck. Zwei Beispiele solcher Dreiecke sind unten dargestellt.



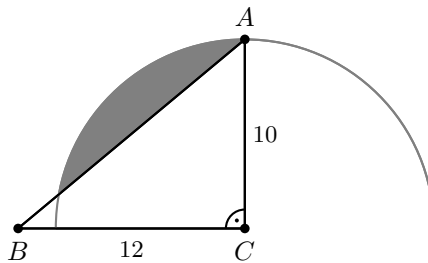
Beispiel 1



Beispiel 2

Seien α , β bzw. γ die inneren Winkel des Dreiecks bei den Ecken A , B bzw. C .

- i. In Beispiel 1 oben wurde der Punkt A so gewählt, dass $\gamma = 120^\circ$. Berechnen Sie die Seitenlänge \overline{AB} . (1 P.)
- ii. In Beispiel 2 ist $\beta = 50^\circ$. Berechnen Sie den (stumpfen) Winkel α . (1.5 P.)
- iii. Jetzt stellen wir uns vor, dass sich der Punkt A frei auf dem Halbkreis bewegt. Berechnen Sie den grösstmöglichen Wert des Winkels β . (1 P.)
- iv. In Beispiel 3 unten ist $\gamma = 90^\circ$.



Beispiel 3

Berechnen Sie den Flächeninhalt des grauen Kreissegments. (2.5 P.)

Aufgabe 5b: Exponentialfunktionen

Jana entdeckt auf der Oberfläche eines Teiches Algen. Statt die Algen zu entfernen oder ihr Wachstum irgendwie einzudämmen, will Jana deren Verbreitung auf dem Teich untersuchen. Sie stellt fest, dass sich ihr Wachstum wie folgt beschreiben lässt:

$$A(t) = \frac{12}{1 + e^{-0.1t}}$$

Dabei bezeichnet $A(t)$ den Flächeninhalt (in m^2) des Bereichs, den die Algen t Tage nach deren Entdeckung bedecken.

- i. Der Flächeninhalt des ganzen Teiches beträgt 12 m^2 . Wieviel Prozent des Teichs bedecken die Algen 10 Tage nach deren Entdeckung? (1 P.)
- ii. Nach wie vielen Tagen bedecken die Algen 8 m^2 des Teichs? Berechnen Sie das Ergebnis **von Hand**. (2.5 P.)
- iii. Berechnen Sie **von Hand** die momentane Änderungsrate der bedeckten Fläche zum Zeitpunkt $t = 10$. (2.5 P.)

Viel Erfolg wünschen Thomas Blott, Johannes Börlin, Roman Huber, Andreas Kilberth, Matthieu Penserini, Gérald Prétot, Silke Schewe-Uhlig, Valentina Stauber, Robyn Steiner-Curtis, Raphael Ugolini, Constantin von Weymar und Alain Zumbiehl.