gymnasium liestal

Maturitätsprüfungen 2018 – Mathematik schriftlich

Klasse 4A

Bemerkungen:	Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden.
	Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt!
Hilfsmittel:	TI NSpire CX CAS und ihre Formelsammlung
	(Formeln, Tabellen, Begriffe).
	Der Rechner muss im Press-to-Test-Modus sein.

Punkteverteilung:

1	2	3	4	5	6	7	Total
5	12	11	12	6	9	13	68

Grundsatz: Wenn in einer Aufgabe oder Teilaufgabe keine expliziten einschränkenden Anweisungen zur Taschenrechnerverwendung angegeben sind, darf der Rechner uneingeschränkt eingesetzt werden.

Aufgabe 1 - Vektorgeometrie I

Ein Viereck $ABCD$ (es wird die Standardbeschriftung verwendet) ist durch die Punkte $A(2|1|3)$, $B(0|6|0)$, $C(-6|0|-3)$ und $D(-4|-5|0)$ gegeben.

1. Zeigen Sie, dass es sich um ein Parallelogramm handelt. (1 P.)

2. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Parallelogramms. (1 P.)

3. Das Parallelogramm mit Diagonalenschnittpunkt M wird als Grundfläche einer geraden Pyramide mit Spitze S betrachtet, wobei die Höhe $\overline{MS}$ die Länge $3\sqrt{37}$ haben soll. Berechnen Sie die Koordinaten der Spitze S (der z-Wert von S soll grösser als Null sein). (3 P.)

Aufgabe 2 - Vektorgeometrie II und Optimierung

Gegeben ist eine Kugel K durch ihren Radius $R = 3$ und Mittelpunkt $M(1|2|2)$, sowie eine Ebene $\varepsilon : -x - 2y + 2z = 17$.

1. Zeigen Sie ohne Hilfe des TR, dass K nicht von ε geschnitten wird. (2 P.)

2. Bestimmen Sie diejenigen Ebenen, welche parallel zu ε und zugleich Tangentialebenen an die Kugel K sind. (2 P.)

3. Der Kugelmittelpunkt M sei die Spitze eines geraden Kreiskegels, dessen Grundkreis durch den Schnitt der xy-Ebene (Grundrissebene) mit der Kugeloberfläche gegeben ist.

   (a) Geben Sie die Gleichung dieses Grundkreises an. (1 P.)

   (b) Berechnen Sie das Volumen des Kreiskegels. (1 P.)

   (c) Berechnen Sie den Neigungswinkel einer Mantellinie gegenüber der Grundfläche. (1 P.)

4. *Diese Teilaufgabe ist vollständig von Hand (ohne CAS) zu rechnen. Die entsprechenden Zwischenschritte müssen vorhanden sein.*

   Wir betrachten nun die Schar aller geraden Kreiskegel, die den Kugelmittelpunkt M als Spitze haben und als Grundfläche den Schnittkreis der Kugeloberfläche mit einer beliebigen Parallelebene zur xy-Ebene. Auf welcher Höhe muss sich diese Parallelebene befinden, damit das Kegelvolumen maximal ist? (5 P.)

Aufgabe 3 - Gebrochenrationale Funktionen

Diese Aufgabe ist vollständig von Hand (ohne CAS) zu rechnen. Die entsprechenden Zwischenschritte müssen vorhanden sein.
Man bestimme die reellen Zahlen a, b und c so, dass der Graph k der Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + a}{bx^2 + c}$$

die unten genannten vier Eigenschaften hat. Es empfielt sich die folgenden Kriterien in der gegebenen Reihenfolge abzuarbeiten.

(I) $y = -\frac{1}{2}$ ist Asymptote von k.

(II) k besitzt ein relatives Extremum mit dem Funktionswert $\frac{3}{4}$.

(III) An der Stelle $x_0 = 1$ hat k die Steigung 5.

(IV) k hat im Intervall $0 < x < 1$ einen Pol.

(11 P.)

Aufgabe 4 - Komplexe Zahlen und Kegelschnitte

1. Zeichnen Sie in einer Gaussschen Zahlenebene diejenigen Kurven, beziehungsweise Gebiete ein, in denen alle Punkte liegen, deren zugehörige komplexe Zahlen $z = x + iy$ folgende Bedingungen erfüllen:

   (a) Der Realteil ändert sich nicht, wenn die komplexe Zahl z quadriert wird.

   (b) Der Realteil vergrössert sich, wenn die komplexe Zahl z quadriert wird.

   (7 P.)

2. Bestimmen Sie die Gleichung des geometrischen Ortes aller Punkte $P(x|y)$, die zu einem festen Punkt $Q(3|0)$ auf der x-Achse einen halb so grossen Abstand wie zur y-Achse haben. Um was für einen Kegelschnitt handelt es sich? Beschreiben Sie ihn so genau wie möglich!

   (5 P.)

Aufgabe 5 - Wachstum und Zerfall

Von einem radioaktiven Isotop sind anfänglich 1000 Gramm vorhanden. Nach 10 Millionen Jahren sind es noch 990.2 Gramm.

1. Stellen Sie die Zerfallsfunktion in der Form $N(t) = N(0) \cdot a^t$ auf und berechnen Sie den Wert der Wachstumskonstanten a sowohl exakt, sowie auch in Bezug auf die gegebene reale Situation numerisch sinnvoll gerundet. (1 P.)

2. Leiten Sie ohne Einsatz des CAS einen formalen Ausdruck für die Halbwertszeit $T_{1/2}$ her (Zeit bis nur noch die halbe Anfangsmenge vorhanden ist) und berechnen Sie danach den numerischen Wert der Halbwertszeit für das gegebene Isotop mit dem Taschenrechner auf 3 signifikante Ziffern genau. (2 P.)

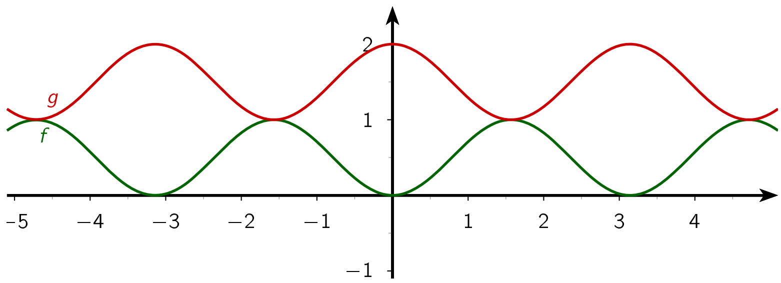
3. In der Physik wird bei radioaktiven Zerfällen üblicherweise die Form $N(t) = N(0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ verwendet, wobei e die Eulersche Zahl ist. Zeigen Sie formal und ohne Einsatz des CAS einen möglichst einfachen Zusammenhang zwischen dem Wachstumsfaktor a der ersten Teilaufgabe und der sogenannten Zerfallskonstanten λ. (1 P.)

4. Wir betrachten die allgemeine Situation von zwei verschiedenen zerfallenden Stoffen, deren Zerfälle den Zerfallsgesetzen $N_1(t) = N_1(0) \cdot {a_1}^t$ und $N_2(t) = N_2(0) \cdot {a_2}^t$ gehorchen. Berechnen Sie formal und ohne Einsatz des CAS die Zeit t, zu welcher von beiden Stoffen die gleichen Mengen vorhanden sind. (2 P.)

Aufgabe 6 - Trigonometrische Funktionen und Integralrechnung

Diese Aufgabe ist vollständig von Hand (ohne CAS) zu rechnen. Die entsprechenden Zwischenschritte müssen vorhanden sein. Insbesondere sollen Sie auch das zu lösende Integral selber integrieren ohne auf Formeln für spezielle Integrale in der Formelsammlung zurückzugreifen.

Gegeben sind die beiden Funktionen $f(x) = \sin^2(x)$ und $g(x) = \cos^2(x) + 1$.



1. Zeigen Sie, dass sich die Graphen der beiden Funktionen in unendlich vielen Punkten berühren und geben Sie die gesamte Lösungsmenge dieses Schnittproblems an. (3 P.)

2. Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen den beiden Kurven zwischen zwei benachbarten Berührungspunkten. (6 P.)

Aufgabe 7 - Kombinatorik, Wahrscheinlichkeit, Stochastik

Die Teilaufgaben 1 - 4 sind voneinander unabhängig.

1. Eine Urne enthält drei rote, vier blaue und fünf grüne Kugeln. Nacheinander werde drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit,
   (a) drei verschiedenfarbige Kugeln zu ziehen, (1.5 P.)
   (b) drei gleichfarbige Kugeln zu ziehen, (1.5 P.)
   (c) mindestens eine rote Kugel zu ziehen. (1.5 P.)
2. Ein Gitternetz besteht aus 7 waagrechten und 9 senkrechten Linien. Wie viele Rechtecke sind zu sehen? (1.5 P.)
3. Eine Urne enthält zwei "normale" Münzen (mit Kopf und Zahl) und eine Spezialmünze, die auf beiden Seiten Kopf zeigt. Eine Münze wird zufällig gezogen und zweimal geworfen: Sie zeigt zweimal Kopf. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde die Spezialmünze gezogen? (3 P.)
4. Eine Partei hält Versammlungen ab, zu denen jeweils 100 Mitglieder eingeladen werden. Erfahrungsgemäss besucht ein eingeladenes Mitglied die Versammlung mit einer Wahrscheinlichkeit von 70%.
   (a) Eine Versammlung wird als "sehr gut besucht" bezeichnet, wenn mindestens 80 der geladenen 100 Personen anwesend sind. Die Parteileitung beruft am 31.10. eine Versammlung ein. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Versammlung "sehr gut besucht"? (2 P.)
   (b) *Falls Sie die vorhergehende Aufgabe nicht lösen konnten, rechnen Sie mit dem Ergebnis 1.65% weiter.*
   Wie viele Versammlungen müssen mindestens stattfinden, damit mit mehr als 90% Wahrscheinlichkeit wenigstens eine Versammlung "sehr gut besucht" ist? (2 P.)

Viel Erfolg wünscht Ihnen Dr. Christian Freiburghaus.