gymnasium liestal

Maturité 2016 – Examen écrit de mathématiques

Classes : 4SI, 4S (bilingue français)

Durée de l'examen :	4 heures
Remarque :	Commencer chaque exercice sur une nouvelle feuille.
Ressources autorisées :	Calculatrice TI-*n*spire CAS, en mode *Press-to-Test* Formulaire (*Fundamentum Mathematik und Physik*) sans annotation Dictionnaire français – allemand

Exercice 1 : Géométrie vectorielle (12 points)

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation : $3x+2y+6z=18$, ainsi que les deux droites g et h d'équations $g:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\8\\7\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-5\\1\\-6\end{pmatrix}$ et $h:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}5\\2\\5\end{pmatrix}$

a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec les axes x, y et z, puis dessiner le plan et les droites g et h dans le système de coordonnées de la page 2. (2 P.)

b) Déterminer **à la main** les coordonnées du point d'intersection S des deux droites g et h. (2 P.)

c) Calculer l'angle entre les droites g et h. (1 P.)

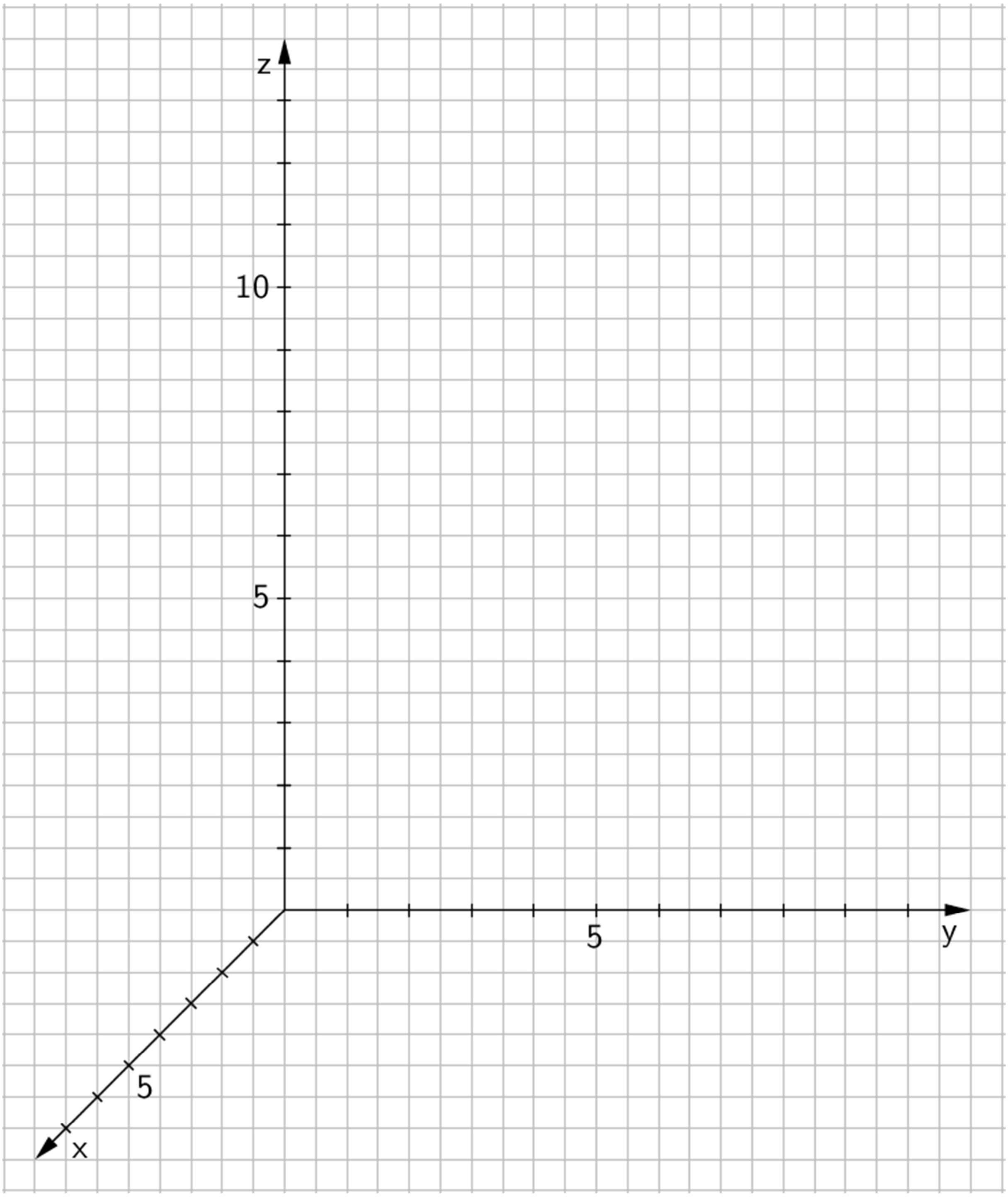
Le point $S(8|7|13)$ est le sommet d'un tétraèdre de base triangulaire F_SGH, où F_S est le projeté orthogonal (*Lotfusspunkt*) de S sur le plan $\mathcal{P}$, et $G(-2|9|1)$ et $H(-2|3|3)$ sont les points d'intersection des droites g et h avec le plan $\mathcal{P}$.

d) Déterminer les coordonnées du point F_S. (2 P.)

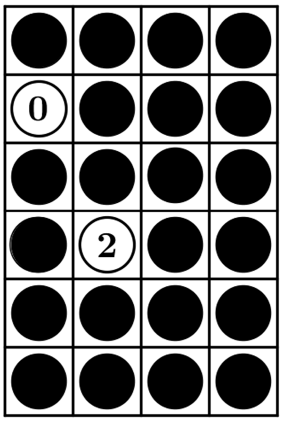
e) Calculer la distance entre le sommet S et la base du tétraèdre, puis calculer le volume de ce tétraèdre. (2.5 P.)

f) Un rayon de lumière issu du sommet S du tétraèdre se réfléchit sur le plan $\mathcal{P}$ au point $R(4|3|0)$. Déterminer une équation du rayon réfléchi (*reflektierten Lichtstrahls*). (2.5 P.)

Système de coordonnées relatif à l'exercice 1 a)



Exercice 2 : Probabilités (11 points)



A l'occasion d'une loterie, des cartes à gratter (*Rubbel-Karten*) sont mises en vente (voir ci-contre). Chaque carte est composée de 24 cases (*Felder*) et derrière chaque case se trouve un des chiffres 0, 1, 2 ou 3 répartis aléatoirement.
Sur chaque carte cependant, le 0 apparaît neuf fois, le 1 apparaît sept fois, le 2 apparaît cinq fois et le 3 apparaît trois fois.
Pour savoir si on a gagné ou perdu, il faut gratter (*rubbeln*) exactement deux cases (choisies au hasard).

a) Soient les événements A, B et C suivants :

A = Les deux cases grattées montrent le chiffre 1. (1 P.)
B = Au moins une case grattée montre le chiffre 0. (1 P.)
C = Les deux cases grattées montrent des chiffres différents et strictement supérieurs à 0. (2 P.)

Montrer que $P(A) = 7.61\%$, $P(B) = 61.96\%$ et $P(C) = 25.72\%$, arrondis à deux chiffres à après la virgule.

b) Une carte est gagnante si aucune case grattée ne montre le chiffre 0.
Uwe achète et gratte 10 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir exactement 4 cartes gagnantes ? (1.5 P.)

c) Combien de cartes Silke doit-elle acheter et gratter pour que la probabilité d'avoir deux fois le chiffre 3 sur au moins une de ses cartes soit supérieure à $\frac{2}{3}$? (1.5 P.)

Le prix d'achat d'une carte est 2 CHF. Les règles suivantes s'appliquent pour les gains (*Gewinne*) de la loterie :

- Si la carte grattée montre au moins un 0, alors le gain est 0 CHF.
- Si la carte grattée montre deux chiffres différents et strictement supérieurs à 0, alors le joueur reçoit 2 CHF.
- Pour un double 1, le joueur reçoit 5 CHF ; pour un double 2, il reçoit 15 CHF et pour un double 3, il reçoit 30 CHF.

d) La variable aléatoire notée X décrit le gain net (*Nettogewinn*) (respectivement la perte nette (*Nettoverlust*)) du point de vue du joueur pour une carte achetée. Calculer la loi de probabilité de X, c'est-à-dire la probabilité associée à chacune des valeurs possibles de la variable X, et présenter les résultats dans un tableau.
Est-il opportun (*ratsam*) de jouer à cette loterie ? Justifier par un calcul. (3 P.)

e) Petra achète 24 cartes à gratter. Quel gain net (ou perte nette) peut-elle espérer globalement ? (1 P.)

Exercice 3 : Analyse I (15 points)

On considère la fonction $g(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - 2x$.

***Précision** : Les calculs des questions a), b) et c) doivent être faits **à la main**.*

a) Déterminer les coordonnées des points extremums de g. (4 P.)

b) Déterminer les coordonnées des points d'inflexion de g. (2.5 P.)

c) Soit d la droite verticale passant par le point minimum du graphe de g. Ainsi, d, le graphe de g et l'axe x délimitent une surface fermée $\mathcal{S}$ pour $0 \leq x \leq 2$. Calculer l'aire géométrique de $\mathcal{S}$. (2 P.)

***Précision** : Pour les questions d), e) et f), la calculatrice est à nouveau autorisée.*

d) Déterminer le rapport (*Verhältnis*) des aires des deux surfaces fermées délimitées par le graphe de g et la parabole d'équation $p(x) = -\left(x - 2\right)^2 + 3$. (2.5 P.)

e) Montrer précisément (*prüfen*) que toute fonction polynomiale de degré 3 de la forme $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ avec $a \neq 0$ a exactement un point d'inflexion et donner alors les coordonnées de ce point d'inflexion. (2 P.)

f) Déterminer l'expression d'une telle fonction polynomiale de degré 3, dont le graphe est symétrique par rapport à l'origine du système de coordonnées (*Koordinatenursprung*) et qui présente un point minimum T de coordonnées $\left(2 \,|\, -5\right)$. (2 P.)

Exercice 4 : Analyse II (10 points)

On considère la fonction $h(x) = \left(2x - x^2\right) \cdot e^{\frac{x}{2}}$, où e désigne la constante d'Euler.

Précision : *Les calculs des questions a) et b) doivent être faits **à la main**.*

a) Calculer les zéros de h. (1 P.)

b) Montrer que la fonction H définie par $H(x) = \left(-2x^2 + 12x - 24\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ est une primitive de la fonction h. (1.5 P.)

Précisions *: Pour les questions c) et d), la calculatrice est à nouveau autorisée. Les résultats seront arrondis à 3 chiffres après la virgule.*

c) On considère un rectangle (*Rechteck*) entièrement situé dans le 3^{e} quadrant, dont un sommet (*Ecke*) se trouve sur l'origine O du système de coordonnées, et dont le sommet P diagonalement opposé à O se trouve sur le graphe de h.

Déterminer les coordonnées de P pour que l'aire du rectangle soit maximale. Quelle est la valeur de cette aire maximale ? (3.5 P.)

d) Le graphe de h délimite avec l'axe x une surface fermée dans le 1er quadrant. Il s'agit en réalité d'un morceau de terrain (*Grundstück*) qu'un père souhaite plus tard léguer (*vererben*) à sa fille et à son fils. L'unité de longueur sur les axes x et y correspond dans la réalité à une distance de 100 mètres.

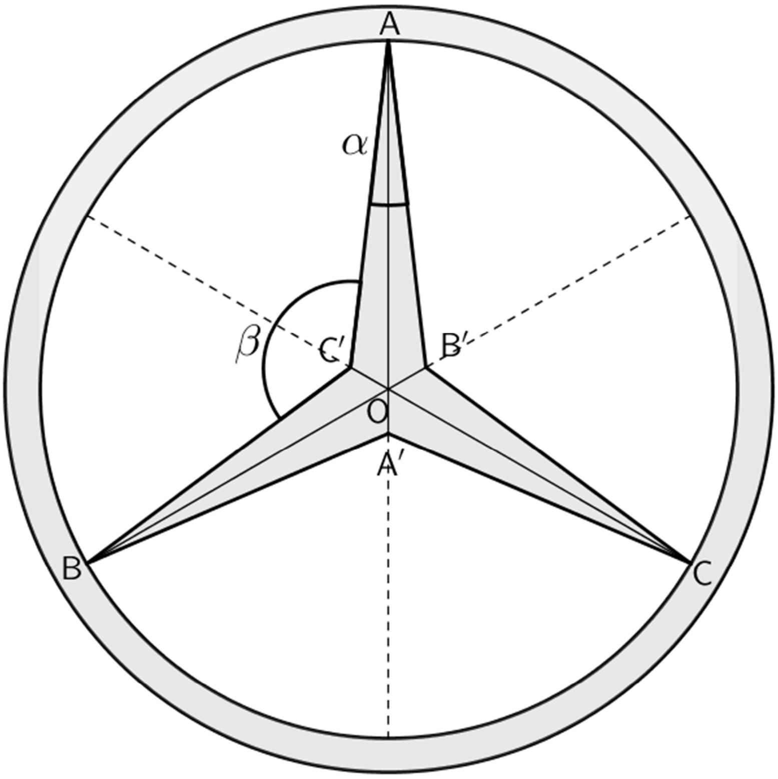
Pour que le partage du terrain soit équitable (*gerecht*), la surface est divisée en deux parties d'aires égales. La frontière (*Grenze*) entre ces deux parties est la droite NQ, où $N\left(1|0\right)$ et Q est un point situé sur le graphe de h.

Déterminer les coordonnées de Q. Quelle est alors l'aire (en m^2) de la partie du terrain reçue par chaque enfant ? (4 P.)

Demi-exercice 5a : Trigonométrie (6 points)

Les logos, emblèmes des marques, sont très souvent composés de formes mathématiques élémentaires. Voici le logo d'une célèbre marque de voitures.

Ce logo gris est composé d'une étoile **régulière** à trois branches inscrite dans une couronne circulaire (*Kreisring*) de centre O. Le rayon du cercle intérieur est $r = 4$ cm et celui du cercle extérieur est $R = 4.4$ cm.
De plus, l'aire de la couronne est égale au **double** de l'aire de l'étoile.



***Précision** : Les résultats seront arrondis à 3 chiffres après la virgule.*

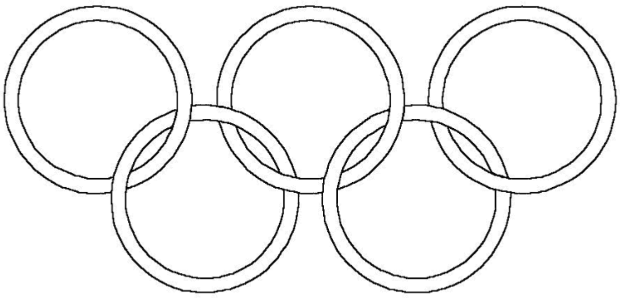
a) Calculer l'aire de l'étoile, puis montrer que $\overline{OB'} \approx 0.508$ cm. (3 P.)

b) Calculer la longueur d'une branche de l'étoile (par exemple $\overline{AB'}$). (1 P.)

c) Quelles sont les valeurs des angles $\alpha = \measuredangle C'AB'$ et $\beta = \measuredangle AC'B$? (2 P.)

Demi-exercice 5b : Combinatoire (6 points)

Dans son cahier de coloriage (*Malbuch*), Bob a trouvé le motif des anneaux olympiques (*die olympischen Ringe*). Chaque anneau sera colorié avec une seule et même couleur.



a) Sa boîte contient 12 crayons (de couleurs toutes différentes). De combien de façons différentes peut-il colorier les anneaux si les répétitions d'une même couleur sont possibles ? (1 P.)

b) Bob choisit 5 crayons dans sa boîte.

  i) Combien de possibilités différentes a-t-il pour réaliser ce choix ? (1 P.)

  ii) De combien de façons différentes peut-il colorier les anneaux avec ces 5 couleurs si chaque couleur est utilisée une seule fois ? (1 P.)

c) Finalement, Bob utilise seulement le bleu, le jaune et le rouge.
De combien de façons différentes peut-il colorier les anneaux en utilisant ces 3 couleurs, si chaque couleur est utilisée au moins une fois ? (3 P.)