gymnasium liestal

Maturitätsprüfungen 2016 – Mathematik schriftlich

Klassen: 4IM, 4S, 4Wa, 4WZ, 5KSW

Bemerkungen:	Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden.
	Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt!
Hilfsmittel:	Taschenrechner TI-Nspire CAS
	Der Rechner muss im Press-To-Test-Modus sein.
	Formelsammlung Fundamentum Mathematik und Physik, Orell Füssli Verlag, ohne Notizen

Aufgabe 1: Vektorgeometrie (12 Punkte)

Gegeben ist die Ebene E: $3x + 2y + 6z = 18$, sowie die beiden Geraden

$$g:\ \vec{r}_g = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{und } h:\ \vec{r}_h = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Achsenabschnitte der Ebene E und zeichnen Sie die Ebene und auch die beiden Geraden g und h ins beigefügte Koordinatensystem auf Seite 2. (2 P.)

b) Berechnen Sie **von Hand** die Koordinaten des Schnittpunkts S der Geraden g und h. (2 P.)

c) Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen den beiden Geraden. (1 P.)

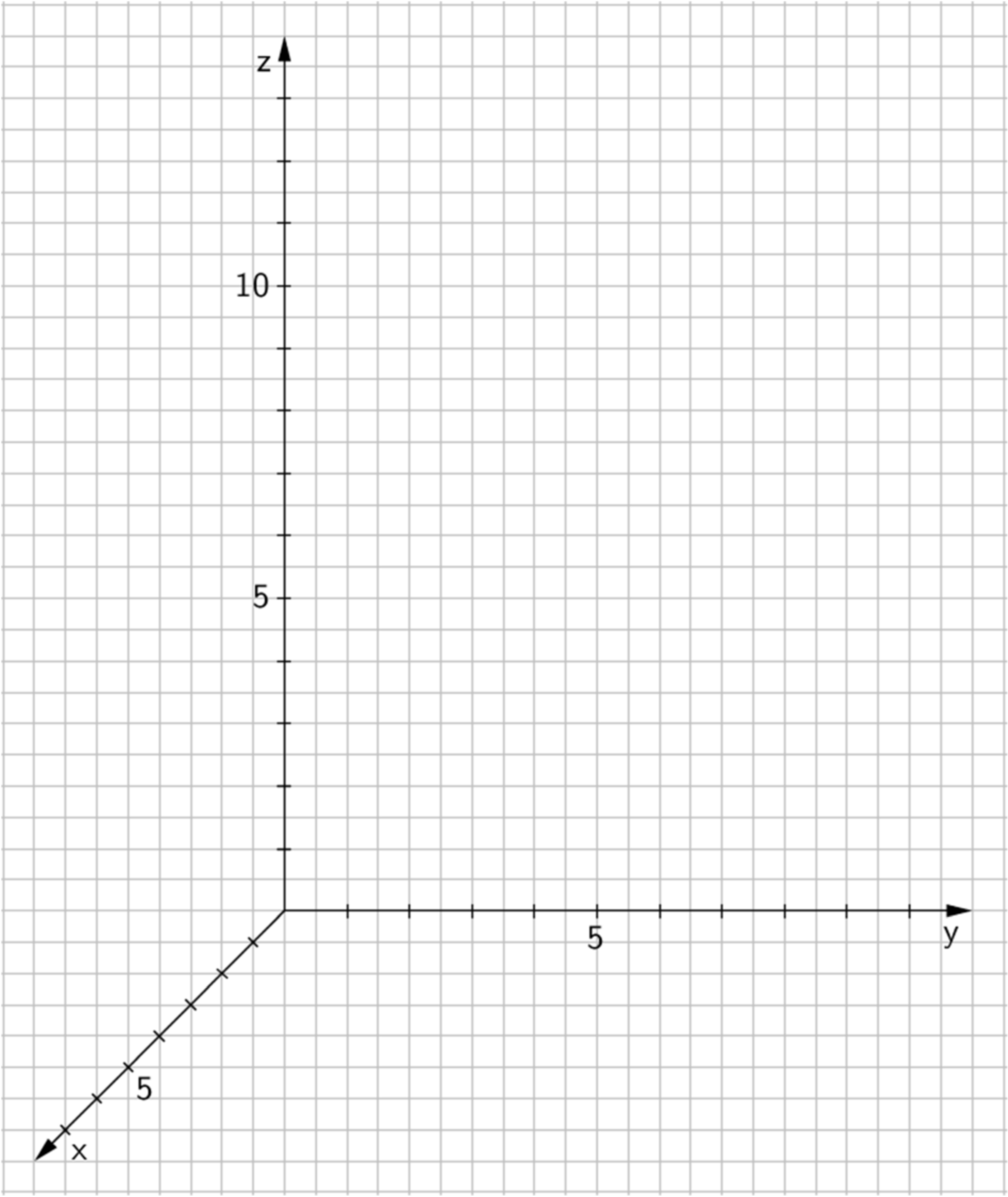
Der Punkt S(8/7/13) bildet die Spitze einer Pyramide mit dreieckiger Grundfläche F_SGH, wobei F_S der Lotfusspunkt der Spitze S auf der Ebene E ist und G(–2/9/1) und H(–2/3/3) die Schnittpunkte der Geraden g und h mit der Ebene E sind.

d) Berechnen Sie die Koordinaten von F_S. (2 P.)

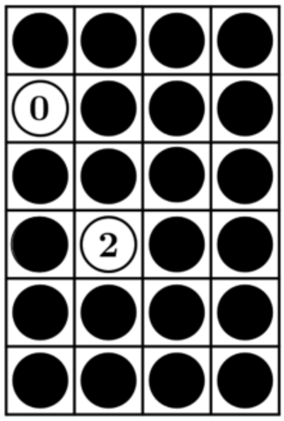
e) Berechnen Sie den Abstand der Spitze S von der Grundfläche der Pyramide und ihr Volumen. (2.5 P.)

f) Von der Spitze S der Pyramide geht ein Lichtstrahl aus und wird im Punkt P(4/3/0) an der Ebene E reflektiert. Berechnen Sie die Gleichung der Geraden des reflektierten Lichtstrahls. (2.5 P.)

Koordinatensystem für Aufgabe 1a)



Aufgabe 2: Stochastik (11 Punkte)



Bei einer Lotterie werden Rubbel-Karten verkauft (vgl. nebenstehende Abbildung). Jede Karte enthält 24 Felder, in denen zufällig angeordnet eine der Zahlen 0, 1, 2, oder 3 steht. Auf jeder Karte kommt die 0 neunmal vor, die 1 siebenmal, die 2 fünfmal und die 3 dreimal. Um zu sehen, ob man gewinnt oder verliert, muss man genau zwei Felder rubbeln.

a) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse A, B und C, auf zwei Nachkommastellen gerundet, p(A) = 7.61%, p(B) = 61.96% und p(C) = 25.72% betragen:

A = Beide gerubbelten Felder zeigen die 1. (1 P.)
B = Mindestens ein gerubbeltes Feld zeigt die 0. (1 P.)
C = Die beiden gerubbelten Felder zeigen verschiedene Zahlen grösser als 0. (2 P.)

b) Eine Karte, bei der kein gerubbeltes Feld die 0 zeigt, ist eine Gewinnkarte. Uwe kauft und rubbelt 10 Karten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau 4 dieser Karten Gewinnkarten? (1.5 P.)

c) Wie viele Karten muss Silke mindestens kaufen und rubbeln, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $\frac{2}{3}$ wenigstens einmal ein Dreier-Pärchen auf einer Karte freirubbelt? (1.5 P.)

Der Kauf einer Karte kostet Fr. 2.−.
Es gelten die folgenden Auszahlungsregeln der Lotterie:

- Zeigt eine gerubbelte Karte mindestens eine 0, so erhält man kein Geld.
- Rubbelt der Teilnehmer zwei verschiedene Zahlen grösser als 0, so erhält er Fr. 2.–.
- Bei zwei Einsen erhält der Teilnehmer Fr. 5.– ausbezahlt, bei zwei Zweiern Fr. 15. – und bei zwei Dreiern Fr. 30.−.

d) Die Zufallsvariable X beschreibt den Nettogewinn (bzw. -verlust) aus Sicht des Teilnehmers. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X in einer Tabelle dar und begründen Sie durch Rechnung, ob es ratsam ist, an der Lotterie teilzunehmen. (3 P.)

e) Petra kauft 24 Lotterie-Karten. Welchen Nettogewinn (bzw. -verlust) darf sie insgesamt erwarten? (1 P.)

Aufgabe 3: Analysis I (15 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $g(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - 2x$.

Hinweis: *Die Aufgaben 3a), 3b) und 3c) sind von Hand zu lösen.*

a) Berechnen Sie die Koordinaten sämtlicher Extrema von g. (4 P.)

b) Berechnen Sie die Koordinaten allfälliger Wendepunkte von g. (2.5 P.)

c) Zeichnet man eine Senkrechte zur x-Achse durch den Tiefpunkt T des Graphen von g, so wird für $0 \leq x \leq 2$ eine Fläche A_T zwischen dem Graphen von g und x-Achse eingeschlossen. Berechnen Sie den Flächeninhalt von A_T. (2 P.)

Hinweis: *Für die folgenden Teilaufgaben von Aufgabe 3 ist der Taschenrechner zugelassen.*

d) Berechnen Sie das Verhältnis der beiden Flächenstücke, die vom Graphen von g und der Parabel p mit $p(x) = -(x-2)^2 + 3$ eingeschlossen werden. (2.5 P.)

e) Prüfen Sie nun, ob jedes Polynom 3. Grades der Form $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ mit $a \neq 0$ genau einen Wendepunkt besitzt und geben Sie die vollständigen Koordinaten des Wendepunkts an. (2 P.)

f) Geben Sie die Gleichung desjenigen Polynoms 3. Grades an, welches punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist und einen Tiefpunkt bei T(2/–5) aufweist. (2 P.)

Aufgabe 4: Analysis II (10 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $h(x) = \left(2x - x^2\right)\cdot e^{\frac{x}{2}}$, wobei e die Euler-Zahl ist.

Hinweis: *Die Aufgaben 4a) und 4b) sind von Hand zu lösen.*

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von h. (1 P.)

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $H(x) = \left(-2x^2 + 12x - 24\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ eine Stammfunktion von h ist. (1.5 P.)

Hinweis: *Für die folgenden Teilaufgaben von Aufgabe 4 ist der Taschenrechner zugelassen. Die Ergebnisse sind auf 3 Nachkommastellen genau zu runden.*

c) Wir betrachten nun ein vollständig im 3. Quadranten liegendes Rechteck, dessen eine Ecke der Koordinatenursprung O und dessen gegenüberliegende Ecke Q ein Punkt des Graphen von h ist. Berechnen Sie die Koordinaten von Q, so dass das Rechteck mit der Ecke Q einen maximalen Flächeninhalt besitzt. Wie gross ist dieser Flächeninhalt? (3.5P)

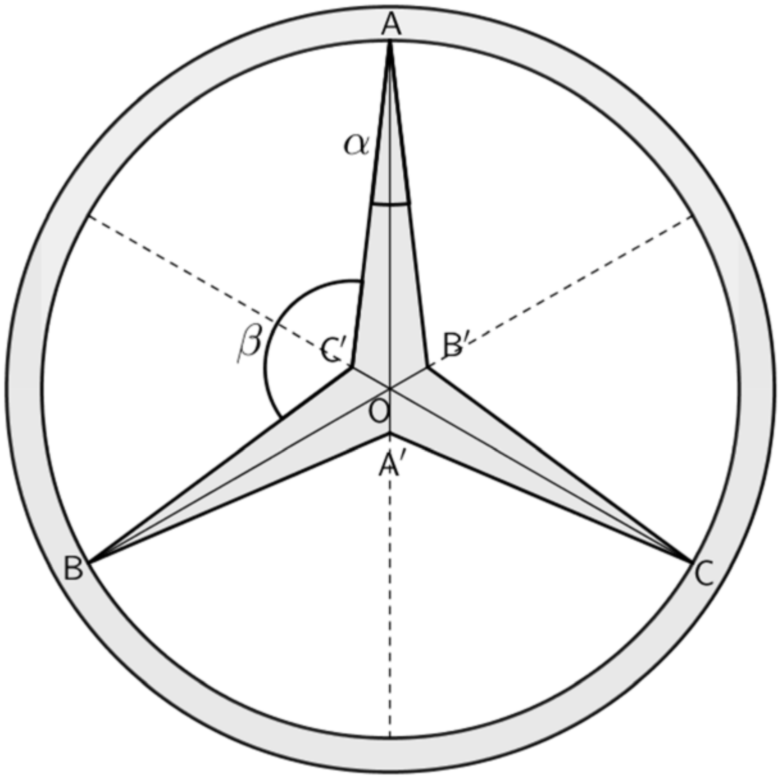
d) Der Graph von h schliesst im 1. Quadranten mit der x-Achse eine Fläche ein. Sie entspricht in Wirklichkeit einem Grundstück, welches der Vater später an seine Tochter und an seinen Sohn vererben will, wobei eine Einheit auf den Achsen in Wirklichkeit einer Distanz von 100 Metern entspricht. Damit das Erbe gerecht aufgeteilt wird, soll das Grundstück halbiert werden. Dabei verläuft die Grenze geradlinig vom Punkt N(1/0) zu einem Punkt P des Graphen von h. Berechnen Sie die Koordinaten von P. Wie gross ist die Fläche in m^2, die jedes Kind erhält?

(4 P.)

Halbaufgabe 5a: Trigonometrie (6 Punkte)

Logos von Marken sind sehr oft aus elementaren mathematischen Formen zusammengestellt. Unten sehen Sie das Logo einer berühmten Automarke.

Dieses graue Logo ist aus einem **regelmässigen** dreieckigen Stern zusammengestellt, der einem Kreisring mit dem Zentrum O einbeschrieben ist. Der Radius des inneren Kreises ist $r = 4$ cm und der Radius des äusseren Kreises ist $R = 4.4$ cm. Dabei ist die Fläche des Kreisrings doppelt so gross wie die Fläche des Sterns.



Hinweis: *Die Ergebnisse sind auf 3 Nachkommastellen genau zu runden.*

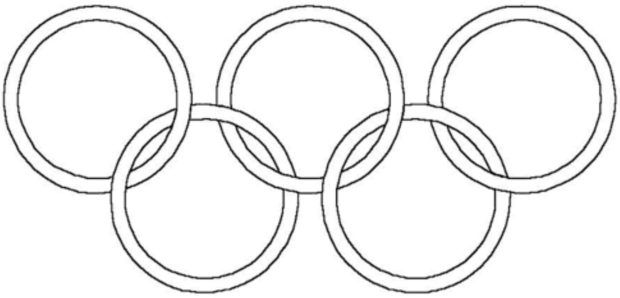
a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Sterns und zeigen Sie, dass die Länge $\overline{OB'} = 0.508$ cm beträgt. (3 P.)

b) Berechnen Sie die Länge einer Seite des Sterns (zum Beispiel $\overline{AB'}$). (1 P.)

c) Wie gross sind die Winkel $\alpha = \measuredangle C'AB'$ und $\beta = \measuredangle BC'A$? (2 P.)

Halbaufgabe 5b: Kombinatorik (6 Punkte)

In seinem Malbuch hat Bob das Motiv der olympischen Ringe gefunden. Jeder einzelne Ring darf nur mit einer Farbe ausgemalt werden.



a) Seine Schachtel enthält 12 Buntstifte unterschiedlicher Farbe. Auf wie viel verschiedene Arten kann er die Ringe ausmalen, wenn die verschiedenen Ringe auch gleiche Farben aufweisen dürfen? (1 P.)

b) Bob wählt mit einem Griff 5 Buntstifte aus seiner Schachtel.
   i. Auf wie viele Arten kann er seine Wahl treffen? (1 P.)
   ii. Auf wie viele Arten kann er die Ringe mit den gewählten 5 Farbstiften ausmalen, wenn er jeden Stift nur für einen einzigen Ring benutzt? (1 P.)

c) Auf wie viel verschiedene Arten kann er die Ringe mit dem blauen, dem gelben und dem roten Stift ausmalen, wenn jeder der 3 Stifte mindestens einmal verwendet werden muss? (3 P.)