gymnasium liestal

Maturitätsprüfungen 2016 - Mathematik schriftlich

Klassen: 4A, 4AB, 4B (MoM, PrG, SuF)

Prüfungsdauer:	4h
Erlaubte Hilfsmittel:	CAS-Taschenrechner im Press-To-Test-Modus mit Anleitung und gegebenenfalls nicht-Grafik/CAS-fähiger Taschenrechner Formelsammlung.
Bemerkungen:	Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt. Die Arbeit mit dem Taschenrechner muss dokumentiert sein. Bei jeder Aufgabe steht die maximale Punktzahl.

Aufgabe 1 - Analysis (12 Punkte)

Gegeben sei die Kurvenschar zu den Funktionen: $f_k(x) = (x^2 - k \cdot x) \cdot e^x$ mit $k > 0, k \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$.

Lösen Sie für die volle Punktzahl die Teilaufgaben (a) und (b) **ohne Einsatz des CAS-Rechners**.

(a) Berechnen Sie die Nullstellen der Kurvenschar. (1.5 P.)

(b) Berechnen Sie die x-Koordinaten aller möglichen Extremalstellen. Geben Sie alle Zwischenschritte an. (2 P.)

(c) Untersuchen Sie die in (b) gefundenen Extremalstellen und bestimmen Sie deren Art. (3 P.)

(d) g_k bezeichne die Tangente an den Graphen von $f_k(x)$ an der Stelle $x = 0$.
Berechnen Sie die Geradengleichung für $g_k(x)$. (1.5 P.)

(e) Wir betrachten die Funktion $f_4(x)$. Berechnen Sie die Koordinaten derjeniger Punkte, wo die Tangente an den Graphen von $f_4(x)$ rechtwinklig auf der Geraden $g : y = -4x$ steht. Runden Sie die Resultate auf zwei Nachkommastellen. (1.5 P.)

(f) Im vierten Quadranten schliessen die Graphen der Funktionen $f_k(x)$ mit der x-Achse eine endliche Fläche ein. Wir lassen diese Fläche um die x-Achse rotieren.
Berechnen Sie die Volumina der so entstehenden Körper R_k. (1.5 P.)

(g) Für welches k entspricht das Volumen des Körpers R_k aus Teilaufgabe (f) genau 5.00 Volumeneinheiten? (1 P.)

Aufgabe 2 - Analysis (12 Punkte)

Gegeben sei die Kurvenschar mit den folgenden Gleichungen:

$$f_k(x) = \frac{2 \cdot x^2 + 2 \cdot k \cdot x + 2 \cdot k}{x+1} \quad \text{für } k \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie für alle Graphen von $f_k(x)$ die Nullstellen und diskutieren Sie die Anzahl dieser Nullstellen in Abhängigkeit von k. (1.5 P.)

(b) Bestimmen Sie alle Definitionslücken und deren Art sowie die Asymptoten der Graphen von $f_k(x)$. (2 P.)

(c) Bestimmen Sie die beiden Werte k, für welche die Tangente an die Kurve von $f_k(x)$ in deren Hoch- respektive Tiefpunkt mit der x-Achse zusammenfällt. (3 P.)

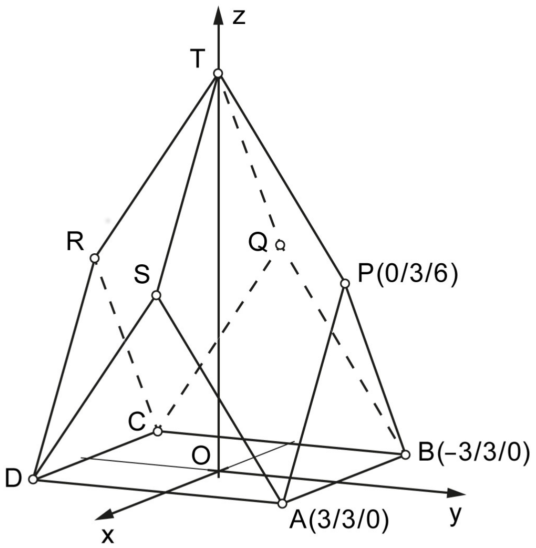
(d) Beweisen Sie, dass die Tangente an den Graphen von $f_k(x)$ in dessen Hochpunkt immer auch die Tangente an den Graphen von $f_{k-4}(x)$ in dessen Tiefpunkt ist. (1.5 P.)

(e) Der Graph von f_{-1} und die Gerade mit der Gleichung $y = x$ schliessen eine endliche Fläche ein. Berechnen Sie deren Inhalt. (1.5 P.)

(f) Welcher Punkt P auf dem Graphen von $f_5(x)$ liegt am nächsten beim Punkt $Q(0|4)$? Berechnen Sie die Koordinaten von P und die Distanz $\overline{PQ}$. (2.5 P.)

Aufgabe 3 - Vektorgeometrie (12 Punkte)

Das Dach eines Turmes mit einer quadratischen Grundfläche hat die in der Zeichnung angegebenen Abmessungen in Metern.



(a) Die Punkte D, S, T und R bilden eine Raute und liegen auf der Ebene E.
Bestimmen Sie die Koordinatengleichung von E und die Koordinaten des Punktes T. (1.5 P.)

Falls Sie die Ebenengleichung nicht berechnen konnten, benutzen Sie im weiteren die Ebenengleichung $E : 2x - 2y + z - 12 = 0$.

(b) Welchen Winkel schliesst die Ebene E mit der Dachkante PT ein? (1 P.)

Zur Verstärkung des Dachstuhles werden Stützstäbe eingezogen.
Von ihrer Dicke ist in der Rechnung abzusehen.

(c) Ein Stab g geht durch die Mitte der Kante PQ und stützt die Dachfläche $DSTR$ senkrecht ab. Berechnen Sie seine Länge. (1 P.)

(d) Ein zweiter Stab h geht von R aus und stützt die Kante PT senkrecht ab. Berechnen Sie seine Länge. (2 P.)

(e) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte, die von der Bodenfläche $ABCD$ und den viereckigen Dachflächenebenen den gleichen Abstand haben.
Welcher dieser Punkte liegt im Innern des Dachraumes? (3 P.)

(f) Auf der Spitze des Daches wird eine Metallkugel k mit dem Radius $1\,\mathrm{m}$ so aufgesetzt, dass ihr Mittelpunkt auf der z-Achse liegt. Diese Kugel trägt eine $3\,\mathrm{m}$ lange auf der z-Achse gelegene Antenne.
Genau im Schwerpunkt U der Dachfläche $DSTR$ befindet sich ein Dachfenster.
Untersuchen Sie durch Rechnung, ob es möglich ist, von U aus die Spitze der Antenne zu sehen. (3.5 P.)

Aufgabe 4 - Wahrscheinlichkeitsrechnung (12 Punkte)

Ein auf Speichermedien spezialisiertes Unternehmen stellt USB-Speicher in den Farben rot, blau und grün her. Sie werden in Packungen zu je 20 Stück an einen Zwischenhändler geliefert. Die farbliche Zusammensetzung einer einzelnen Packung wird zufällig gewählt.

(a) Wie viele unterschiedliche Farbkombinationen dieser Packungen sind möglich? (1.5 P.)

(b) Der Zwischenhändler prüft aus jeder Packung zwei USB-Speicher. Er nimmt die Packung dann an, wenn beide USB-Speicher keine Mängel aufweisen.

(b1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Zwischenhändler eine Packung mit genau 4 defekten USB-Speichern annehmen? Nehmen Sie kurz Stellung zur Brauchbarkeit dieser Prüfung. (1.5 P.)

(b2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden alle 10 Packungen einer Lieferung angenommen, wenn jede von ihnen genau 4 defekte USB-Speicher enthält? (1 P.)

(c) Der Defekt eines USB-Speichers kann zwei Gründe haben: ein defekter Flash-Speicher (I. Mangel) und/oder ein defekter Controllerchip (2. Mangel). Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein USB-Speicher defekt ist, beträgt 0.088. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des I. Mangels ist 0.05 und jene für das Auftreten beider Mängel gleichzeitig ist 0.002. Untersuchen Sie, ob die beiden Mängel unabhängig voneinander auftreten. (2 P.)

(d) Bei der Endkontrolle des Herstellers wird ein USB-Speicher mit der Wahrscheinlichkeit 10% als Ausschuss ausgesondert. Bei dieser Kontrolle wird erfahrungsgemäss ein einwandfreier USB-Speicher mit der Wahrscheinlichkeit 4% als Ausschuss deklariert. 8.8% aller produzierten USB-Speicher sind tatsächlich defekt. Ein bestimmter USB-Speicher ist defekt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er nicht aussortiert wird? (1.5 P.)

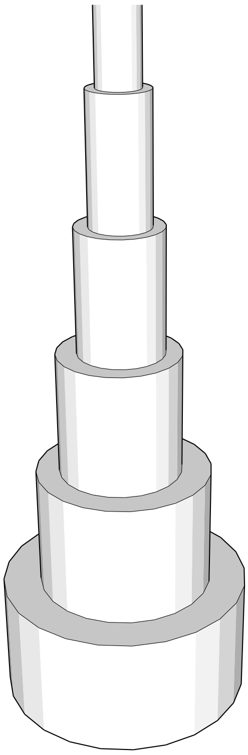
(e) Die Herstellerfirma gibt an, dass von den ausgelieferten USB-Speicher höchstens 2% defekt sind. Mit einer Stichprobe von 200 Stück soll getestet werden, ob die Angabe der Herstellerfirma stimmt.
Bestimmen Sie für ein Signifikanzniveau von 1% einen möglichst grossen Ablehnungsbereich für die Hypothese «Höchstens 2% der USB-Speicher sind defekt». (2 P.)

(f) Ein Zwischenhändler erhält eine Lieferung von 5'000 USB-Speichern. Die Anzahl der defekten USB-Speicher in der Lieferung ist unbekannt, jedoch liegt der Anteil der defekt ausgelieferten USB-Speicher erfahrungsgemäss bei 1.7%. Berechnen Sie mit Hilfe der Normalverteilung ein möglichst kleines Intervall $[0; k]$, so dass die Anzahl der defekten USB-Speicher mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% in diesem Intervall liegt. (2.5 P.)

Aufgabe 5 - Unabhängige Teilaufgaben (12 Punkte)

Die folgenden drei Aufgaben sind voneinander unabhängig.

(a) **Folgen und Reihen**



Professor Hilbert feiert Geburtstag. Natürlich wird da kein normaler Geburtstagskuchen gebacken. Es muss schon ein unendlich hoher sein, vor allem, wenn man sich wie in dieser Aufgabe nicht um die Statik zu kümmern braucht.
Der Kuchen besteht aus unendlich vielen, zylindrischen Etagen von je $1\,\mathrm{m}$ Höhe, die aufeinander gestellt werden.
Der Radius der untersten Etage beträgt ebenfalls $1\,\mathrm{m}$.
Der Radius jeder weiteren Etage ist um 30% kleiner als derjenige der darunter liegenden.

i. Zeigen Sie, dass es sich beim Volumen des gesamten Kuchens, also der Summe der Volumina aller Etagen, um eine geometrische Reihe handelt. (1 P.)

ii. Warum lässt sich ohne Rechnung sagen, dass diese Reihe einen endlichen Wert hat? (1 P.)

iii. Wie gross ist das Volumen des vollständigen, unendlich hohen Kuchens? (1 P.)

iv. Nach wie vielen Etagen werden erstmals 99% oder mehr des Gesamtvolumens erreicht? (1 P.)

(b) **Vollständige Induktion**

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass das Folgende für $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{\mathbf{k=2}}^{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{k-1}}{\mathbf{k!}} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + .. + \frac{n-1}{n!} \quad = \quad \frac{\mathbf{n!-1}}{\mathbf{n!}}$$

(4 P.)

(c) **Integration von Hand**

Berechnen Sie die folgenden beiden Integrale klar ersichtlich von Hand, **ohne Einsatz der CAS-Funktionen Ihres Taschenrechners**.

i. $$\int_0^1 2x^2 \cdot e^{x-1} dx$$ (2 P.)

ii. $$\int_a^b \frac{3x}{x^2-1} dx$$ (2 P.)