Maturitätsprüfungen 2015 - Mathematik schriftlich

Klassen: 4A, 4A(W), 4Ba, 4Bb (FrC, HrP, PrG)

Prüfungsdauer:	4h
Erlaubte Hilfsmittel:	CAS-Taschenrechner im Press-To-Test-Modus mit Anleitung und gegebenenfalls nicht-Grafik/CAS-fähiger Taschenrechner Formelsammlung.
Bemerkungen:	Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt. Die Arbeit mit dem Taschenrechner muss dokumentiert sein. Bei jeder Aufgabe steht die maximale Punktzahl.

Aufgabe 1 - Vektorgeometrie (12 Punkte)

Gegeben sind die Kugel K mit dem Mittelpunkt $M(5|-2|0)$ und dem Radius $r = 9$ sowie die beiden Punkte $A(13|-1|4)$ und $B(8|4|6)$.

(a) **Lösen Sie folgende Teilaufgabe ohne Einsatz der CAS-Funktionen des Taschenrechners.**
Weisen Sie nach, dass die beiden Punkte A und B auf der Kugeloberfläche K liegen und klären Sie ab, ob der Ursprung auf, innerhalb oder ausserhalb der Kugel mit der Oberfläche K liegt. (1.5 P.)

(b) Es soll ein Kanal mit vernachlässigbarem Durchmesser von A nach B durch die Kugel K gebohrt werden. Bestimmen Sie denjenigen Punkt D innerhalb dieses Kanals, welcher dem Kugelmittelpunkt M am nächsten liegt. Wie gross ist dieser Abstand d? (2 P.)

(c) Bestimmen Sie die kürzeste Entfernung b zwischen den Punkten A und B, wenn man sich ausschliesslich auf der Kugeloberfläche bewegt. (2.5 P.)

(d) **Lösen Sie folgende Teilaufgabe ohne Einsatz der CAS-Funktionen des Taschenrechners.**
Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der Kugel K und der Geraden g_{PQ}, welche durch die beiden Punkte $P(1|4|5)$ und $Q(3|4|7)$ verläuft. Geben Sie allfällige Schnittpunkte von K und g_{PQ} an. (2.5 P.)

Gegeben sind nun ein weiterer Punkt $C(1|2|7)$, der ebenfalls auf der Kugeloberfläche K liegt, und die Ebene $E : x - y + 5z = 34$, in welcher die Punkte A, B und C liegen.

(e) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC. (1 P.)

(f) Bestimmen Sie den Mittelpunkt F und den Radius f des Schnittkreises s von Ebene E und Kugel K. (2.5 P.)

Aufgabe 2 - Stochastik (12 Punkte)

Ihre Mathematiklehrkraft hat zum Thema Wahrscheinlichkeitsrechnung 8 leichte, 8 mittelschwere und 8 schwierige Standardaufgaben, aus denen sie für eine Prüfung jeweils 5 verschiedene Aufgaben zufällig auswählt.

Beachten Sie für alle folgenden Aufgaben, dass zwei Prüfungen, welche gleiche Aufgaben in unterschiedlichen Reihenfolgen beinhalten, als identisch zu betrachten sind.

(a) Wie viele verschiedene Prüfungen lassen sich insgesamt erstellen? (1 P.)

Die Prüfungen Ihrer Mathematiklehrkraft bestehen jedoch immer aus einer leichten Aufgabe, zwei mittelschweren Aufgaben und zwei schwierigen Aufgaben, aus denen sie jeweils für eine Prüfung insgesamt 5 verschiedene Aufgaben zufällig auswählt:

Aufgabe	Schwierigkeitsgrad
1	leicht
2	mittelschwer
3	mittelschwer
4	schwierig
5	schwierig

(b) Wie viele verschiedene solche Prüfungen lassen sich erstellen? (1 P.)

Die Prüfungsnote ergibt sich aus der Anzahl richtig gelöster Aufgaben plus Eins. Durchschnittlich begabte Schülerinnen und Schüler lösen leichte Aufgaben immer richtig, im Mittel aber nur drei Viertel der mittelschweren Aufgaben. Die schwierigen Aufgaben gelingen ihnen durchschnittlich nur in einem Viertel der Fälle.

Die folgenden Aufgaben beziehen sich nun auf die Gruppe dieser durchschnittlich begabten Schülerinnen und Schüler.

(c) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, eine Note 6 zu erhalten $\frac{9}{256}$ beträgt. (1 P.)

(d) Wie viele Schülerinnen und Schüler müssten eine solche Prüfung mindestens absolvieren, bis die Wahrscheinlichkeit, dass im Minimum ein Schüler oder eine Schülerin die Note 6 erreicht, mindestens 90% beträgt? (1.5 P.)

(e) Stellen Sie die vollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung der Noten 1 – 6 in einer Tabelle dar. (3 P.)

(f) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für eine genügende Note (mindestens eine 4)? (1 P.)

(g) Mit welcher Note können die durchschnittlich begabten Schülerinnen und Schüler im Mittel rechnen? (1 P.)

(h) Wenn die Schülerinnen und Schüler mehr Aufwand in die Prüfungsvorbereitung stecken würden, würden Sie nicht nur die leichten Aufgaben immer richtig lösen, sondern auch alle mittelschweren Aufgaben.
Wie gross muss die Erfolgsrate bei den schwierigen Aufgaben sein, damit man im Mittel mit einer Note 5.0 rechnen kann? (2.5 P.)

Aufgabe 3 - Analysis (12 Punkte)

Wir betrachten die Funktionenschar $f_k(x) = x \cdot e^{-k \cdot x}$ ($x \geq 0$ und $k > 0$).

Die Berechnungen in dieser Aufgabe sind vollständig ohne den Einsatz der CAS-Funktionen des Taschenrechners auszuführen. Die entsprechenden Zwischenschritte müssen dokumentiert werden.

(a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktion für $k = 0.5$ und $k = 1$ (also $f_{0.5}(x)$ und $f_1(x)$). Verwenden Sie dabei auf der x-Achse den Bereich von $0 \leq x \leq 5$ und auf der y-Achse den Bereich von 0 bis 1 und eine Auflösung von 4 Häuschen pro Einheit. (1.5 P.)

(b) Bestimmen Sie alle Nullstellen. (1 P.)

(c) Beweisen Sie, dass an der Stelle $x = 0$ alle Kurven der Schar dieselbe Steigung besitzen. Wie gross ist diese Steigung? (1.5 P.)

(d) Beweisen Sie, dass es für jeden Wert von k nur einen Hochpunkt gibt. Bestimmen Sie seine Koordinaten in Abhängigkeit von k. (3 P.)

(e) Berechnen Sie die Gleichung der Kurve (Ortskurve), auf der sich das Maximum bewegt, wenn man den Wert von k ändert. (1 P.)

Für die folgende Teilaufgabe sei nun $k = 1$. Wir betrachten den Rotationskörper, der entsteht, wenn der Graph von $f_1(x)$ um die x-Achse rotiert. Dieser Rotationskörper hat auf der x-Achse eine unendliche Ausdehnung und sein Volumen ist durch

$$V = \pi \int_0^\infty (f_1(x))^2 \, dx = \pi \int_0^\infty x^2 e^{-2x} \, dx$$

gegeben.

(f) Berechnen Sie dieses Volumen ohne Verwendung der fertigen Formeln der FoSa auf Seite 74. (4 P.)

Aufgabe 4 - Analysis (12 Punkte)

Wir betrachten die folgenden Funktionen und deren Graphen G_f und G_g:

$$f(x) = -\frac{x^4+4}{x^2}$$
$$g(x) = x^2 - 9$$

(a) Diskutieren Sie ausführlich und in dieser Teilaufgabe **klar erkennbar von Hand ohne Einsatz der CAS-Funktionen des Taschenrechners** den Graphen G_f der Funktion $f(x)$. Untersuchen Sie dazu den Graphen in Hinblick auf die folgenden Aspekte: (7 P.)

i. Erste drei Ableitungen $f'(x), f''(x), f'''(x)$,

ii. Definitionsbereich $\mathbb{D}$,

iii. Symmetrie bezüglich der y-Achse, respektive des Koordinatenursprungs,

iv. Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen,

v. Definitionslücken und deren Art, sowie das Vorzeichenverhalten,

vi. Verhalten im Unendlichen, d.h. Gleichungen der Asymptoten,

vii. Extremalpunkte und deren Art,

viii. Wendepunkte.

(b) Berechnen Sie den Inhalt der endlichen Fläche A zwischen den Graphen G_f und G_g in der rechten Halbebene. (2 P.)

(c) Welcher Punkt auf dem Graphen G_g liegt dem Punkt $P(\ 1 \mid 1\ )$ am nächsten? (3 P.)

Aufgabe 5 - Kurzaufgaben (12 Punkte)

Diese Aufgabe besteht aus zwei voneinander unabhängigen Teilaufgaben.

(a) Folgen und Reihen

Gegeben seien das vierte, das fünfte und das siebente Glied, $a_4 = 0.2$, $a_5 = 0.04$ und $a_7 = 0.0016$, einer reellen Zahlenfolge (a_n).

i. Zeigen Sie, dass es sich bei der Folge (a_n) um eine geometrische Folge handeln kann. Geben Sie für diesen Fall die rekursive und die explizite Bildungsformel für die Folge (a_n) an. (2 P.)

ii. Welches Folgenglied ist erstmals kleiner als 10^{-9}? (1 P.)

iii. Erklären Sie, warum die unendliche Summe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ einen endlichen Wert annimmt. Geben Sie diesen Grenzwert a an. (1 P.)

iv. Beweisen Sie die Formel für die n-te Partialsumme einer Geometrischen Reihe $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$, $q \neq 1$ allgemein mittels vollständiger Induktion. (2 P.)

(b) Komplexe Zahlen

Diese Aufgabe ist ohne Hilfe des CAS zu lösen.

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit der Funktionsgleichung $f(z) = z^2 + \sqrt{3} \cdot i$.
Gesucht sind die Fixpunkte dieser Funktion in der Form $a + b \cdot i,\ a, b \in \mathbb{R}$.
Für die volle Punktzahl wird eine exakte Lösung ohne Verwendung von Polarkoordinaten erwartet. (6 P.)

Aufgabe 5 - Kurzaufgaben (12 Punkte)

Diese Aufgabe besteht aus drei voneinander unabhängigen Teilaufgaben.

(a) Folgen und Reihen
Gegeben seien das vierte, das fünfte und das siebente Glied, $a_4 = 0.2$, $a_5 = 0.04$ und $a_7 = 0.0016$, einer reellen Zahlenfolge (a_n).

i. Zeigen Sie, dass es sich bei der Folge (a_n) um eine geometrische Folge handeln kann. Geben Sie für diesen Fall die rekursive und die explizite Bildungsformel für die Folge (a_n) an. (2 P.)

ii. Welches Folgenglied ist erstmals kleiner als 10^{-9}? (1 P.)

iii. Erklären Sie, warum die unendliche Summe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ einen endlichen Wert annimmt. Geben Sie diesen Grenzwert a an. (1 P.)

iv. Beweisen Sie die Formel für die n-te Partialsumme einer Geometrischen Reihe $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$, $q \neq 1$ allgemein mittels vollständiger Induktion. (2 P.)

(b) Trigonometrie

i. Berechnen Sie für alle möglichen Dreiecke ABC mit den Seiten $a = 6.6$ und $b = 10.4$ sowie dem Winkel $\alpha = 35^\circ$ die fehlende Seite und die fehlenden Winkel. (2 P.)

ii. Bestimmen Sie nun die Länge der Seite a, $a < b$ so, dass das Dreieck ABC eindeutig wird. (1 P.)

(c) Exponentialproblem
Für das Verständnis biologischer Prozesse aber auch für Taucher ist es wichtig, die Helligkeit in verschiedenen Wasserschichten von Gewässern zu kennen. Misst man an der Wasseroberfläche eine Helligkeit H_0, so beobachtet man mit zunehmender Wassertiefe d eine exponentielle Abnahme dieser Helligkeit: $H(d) = H_0 \cdot e^{-\lambda \cdot d}$. Dabei ist λ ein Mass für die Lichtdurchlässigkeit des entsprechenden Gewässers und wird im Wesentlichen durch die Anzahl und Beschaffenheit organischer und anorganischer Schwebeteilchen im Wasser bestimmt. Im Allgemeinen wird λ selber von der Wassertiefe aber bspw. auch von der Jahreszeit und anderen Faktoren abhängen. Betrachten Sie jedoch für die jeweilige Fragestellung λ in grober Näherung als konstant.

i. Im Gewässer A misst man in einer Wassertiefe von einem Meter eine Abnahme der Helligkeit von 18% im Vergleich zur Helligkeit an der Wasseroberfläche. Bestimmen Sie λ_A dieses Gewässers. (1 P.)

ii. Für Gewässer B gilt $\lambda_B = 0.24\,\mathrm{m}^{-1}$. In welcher Tiefe herrscht noch 1% der Helligkeit an der Wasseroberfläche? (1 P.)

iii. Berechnen Sie die Helligkeit in Prozent der Helligkeit an der Oberfläche in einer Tiefe von 15 Metern des Gewässers C mit $\lambda_C = 0.21\,\mathrm{m}^{-1}$.
Begründen Sie stichhaltig, welches der beiden Gewässer B und C trüber ist. (1 P.)