gymnasiumliestal

Maturité 2015 – Examen écrit de mathématiques

Classes : 4(A)W, 4GL, 4IM, 4IS, 4LW, 4S, 4SW, 4W, 4Z, 5KSW

Durée de l'examen :	4 heures
Remarque :	Commencer chaque exercice sur une nouvelle feuille.
Ressources autorisées :	Calculatrice TI-$n$spire CAS, en mode *Press-to-Test*
	Formulaire (*Fundamentum*), sans annotation
	Dictionnaire français-allemand

Exercice 1 : Calcul différentiel et intégral

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{3}{2}x^2.$$

*Les calculs des questions a) et b) doivent être faits **à la main**.*

a) Déterminer les zéros de f ainsi que les points maximums, minimums et les points d'inflexion du graphe de f. (4 P.)

b) Le graphe de f délimite avec l'axe x une surface fermée S. Une droite verticale passant par le point minimum du graphe de f coupe S en deux parties. Calculer le rapport (*Verhältnis*) des aires de ces deux parties. (3 P.)

On considère maintenant la famille de fonctions f_p définie par :

$$f_p(x) = \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{p}{2}x^2,\ \ p \neq 0.$$

Pour les questions c) à e), on pourra utiliser la calculatrice au maximum de ses possibilités. La méthode de résolution devra cependant être clairement expliquée et bien rédigée.

c) Montrer que chaque fonction f_p a un point extremum qui n'est pas confondu avec l'origine (*Ursprung*). Préciser alors les valeurs de p pour lesquelles ce point est un maximum, respectivement un minimum. (2 P.)

d) Déterminer l'équation de la coube générée (formée) par tous les points maximums et tous les points minimums de f_p. (1,5 P.)

e) Pour quelles valeurs de p la pente du graphe de f_p est-elle égale à -2 en son point d'inflexion ? (1,5 P.)

Exercice 2 : Calcul différentiel et intégral

On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{4}{x^2}.$$

a) Un rectangle (*Rechteck*) est défini de la façon suivante :

- un sommet (*Ecke*) se trouve sur l'origine $O(0|0)$;
- le sommet diagonalement opposé à O se trouve sur le graphe de g, dans le premier quadrant ;
- les côtés du rectangle sont parallèles aux axes x et y.

Faire un schéma (*Skizze*) de la situation.
Déterminer la largeur et la longueur du rectangle de périmètre (*Umfang*) minimal. (4 P.)

b) Un triangle (*Dreieck*) est défini de la façon suivante :

- un sommet se trouve sur l'origine $O(0|0)$;
- un côté est tangent au graphe de g. Ce côté coupe les axes x et y en deux points qui définissent les deux autres sommets du triangle.

Faire un schéma (*Skizze*) de la situation.
Montrer qu'il n'existe aucun triangle (ainsi défini) ayant une aire minimale. (4 P.)

Pour $x \geq 1$, la révolution (rotation) du graphe de g autour de l'axe x définit un entonnoir (*ein Trichter*). L'entonnoir est donc borné (*beschränkt*) à gauche par $x = 1$, mais il s'étend à droite aussi loin que l'on veut.

c) Où faut-il borner l'entonnoir à droite pour que son volume soit égal à 15 unités de volume ? (2 P.)

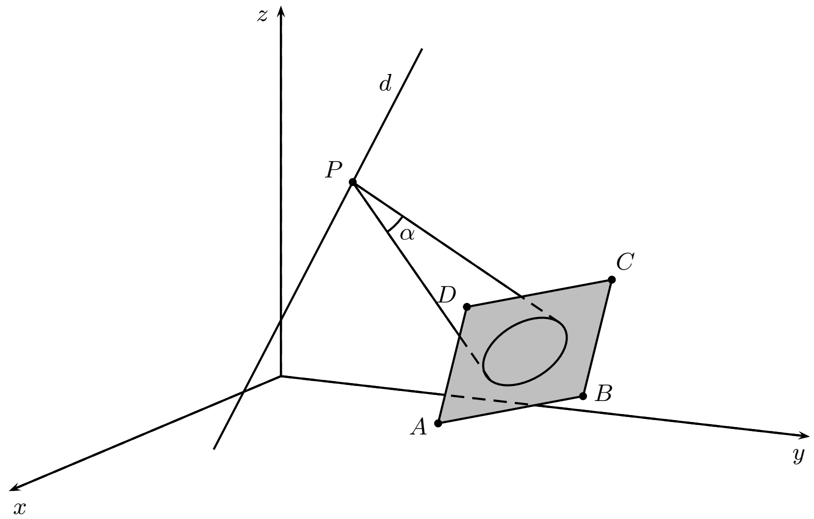
d) Quel volume maximal l'entonnoir peut-il avoir ? (2 P.)

Exercice 3 : Géométrie vectorielle

Un écran rectangulaire est éclairé (*angestrahlt*) par un projecteur (*Scheinwerfer*) qui génère un faisceau lumineux de la forme d'un cône (voir schéma ci-dessous). Les points $A(8|20|0)$, $B(-4|26|0)$, $C(-2|30|12)$ et $D(10|24|12)$ définissent les sommets (*Eckpunkte*) de l'écran. Le projecteur est fixé sur un câble en acier (*Stahlseils*) défini par la droite d d'équation :

$$d\ :\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 7 \\ 34 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Il est possible de modifier l'angle d'ouverture α du projecteur.



Le projecteur est positionné au point $P(-9|1|16)$.

a) Montrer que le point P appartient à la droite d. (1 P.)

b) Calculer l'aire de l'écran rectangulaire. (1 P.)

c) Déterminer une équation cartésienne du plan Π qui contient l'écran. (2 P.)

Si vous n'avez pas trouvé de réponse à la question c), vous pouvez utiliser pour Π *l'équation suivante :* $6x + 12y - 5z - 288 = 0$.

d) Calculer la distance entre le point P et le plan Π. (1 P.)

e) Montrer que le projecteur éclaire le centre de l'écran avec un rayon lumineux perpendiculaire à l'écran. (2 P.)

f) L'angle d'ouverture α du projecteur est réglé pour que l'écran soit éclairé en entier. L'écran produit alors une ombre (*Schatten*) sur le plan xy. Déterminer les coordonnées du point C' de l'ombre ainsi produite (par C). (2 P.)

g) On veut réduire (*verkleinern*) l'angle d'ouverture α pour que la surface éclairée sur l'écran soit la plus grande possible, mais que la lumière ne dépasse pas les bords de l'écran. Calculer la valeur de l'angle α correspondant. (3 P.)

Exercice 4 : Combinatoire et probabilité

Votre professeur de mathématiques possède une collection (*Sammlung*) de 24 questions standard sur le thème de la probabilité. Pour chaque test, il choisit dans cette collection 5 questions différentes.

a) Combien de tests différents est-il possible de créer, si l'ordre des questions ne joue aucun rôle ? (1 P.)

b) Vous estimez pouvoir répondre correctement à chaque question de la collection avec une probabilité de $\frac{2}{3}$. Dans cette situation :

   i. Quelle est la probabilité de répondre correctement à exactement 3 questions lors d'un test ? (1,5 P.)

   ii. Quelle est la probabilité de répondre correctement à au moins 3 questions lors d'un test ? (1,5 P.)

En réalité les 24 questions sont composées de 8 questions faciles, 8 questions de difficulté moyenne et 8 questions difficiles.

c) Si le professeur choisit 5 questions au hasard dans la collection, quelle est la probabilité d'obtenir un test avec exactement une question facile et quatre questions de difficulté moyenne ? (2 P.)

On considère à présent que chaque test est composé d'une question facile, de deux questions de difficulté moyenne et de 2 questions difficiles, chaque question étant choisie au hasard. Pour calculer la note du test, le professeur compte le nombre de bonnes réponses et ajoute 1. Une note suffisante, c'est-à-dire 4, 5 ou 6, est alors obtenue si l'on répond correctement à au moins 3 questions.

d) Combien de tests différents peut-on réaliser ? (1,5 P.)

e) Vous considérez que :
   - vous répondez toujours correctement aux questions faciles ;
   - en moyenne, vous répondez correctement aux trois quarts des questions de difficulté moyenne ;
   - en moyenne, vous trouvez la bonne réponse à seulement un quart des questions difficiles.

   Quelle est dans ce cas la probabilité d'obtenir la note 5 ou 6 ? (3 P.)

f) Vous considérez pour finir que la probabilité d'obtenir la note 6 à un test est égale à $\frac{9}{256}$. Combien alors devriez-vous passer de tests pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois la note 6 soit supérieure à 90 % ? (1,5 P.)

Exercice 5 : Trigonométrie et fonction exponentielle

a) John[1] est un pilote de deltaplane (*Deltasegler*). Inventif et passionné, il prévoit de modifier la barre de contrôle (*Basisrohr*) de son deltaplane pour qu'elle soit un peu plus longue. Avant de réaliser les modifications, il souhaite cependant vérifier la fiabilité de cette nouvelle configuration.

Les deux configurations sont représentées dans la figure ci-dessous (la figure n'est pas à l'échelle).

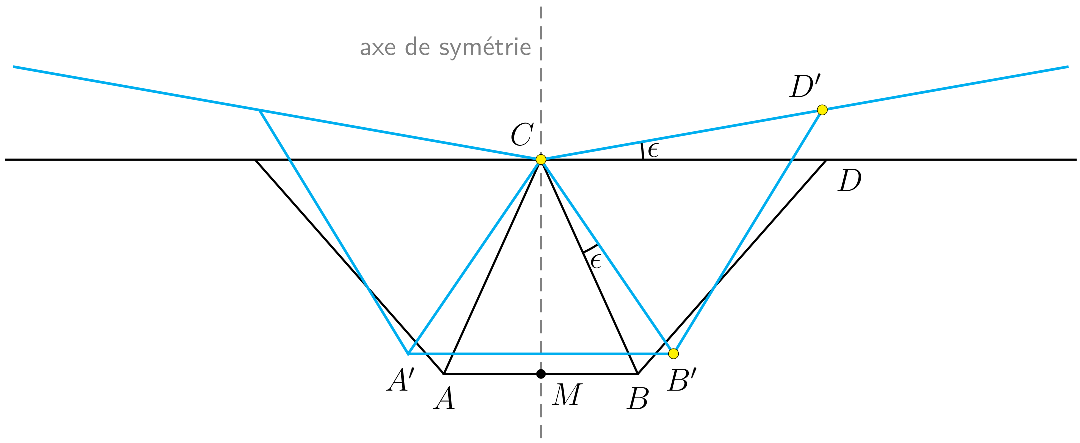
La configuration originale est représentée en noir. Le cadre de contrôle triangulaire ABC a pour hauteur $\overline{CM} = 1{,}60$ m. La longueur de la barre de contrôle d'origine est $\overline{AB} = 1{,}20$ m. La longueur du segment $\overline{CD}$ mesure $3{,}15$ m.

La nouvelle configuration, avec des ailes en forme de V, est représentée en bleu clair. La nouvelle barre de contrôle $\overline{A'B'}$ est 6 cm plus longue que la barre d'origine. Les longueurs des autres barres ne changent pas.

Pour vérifier la fiabilité de cette nouvelle configuration, John a besoin de répondre aux questions suivantes :

i. Quelle valeur prend l'angle ϵ entre les ailes des deux configurations ?
ii. Quelles sont les valeurs des angles $\alpha = \angle D'B'C$ et $\beta = \angle B'CD'$?

Arrondir les réponses à la 2e décimale. (6 P.)



Suite de l'exercice page suivante

1. Ce nom fait référence à l'inventeur australien John Dickenson (*1934), qui introduisit en 1963 une nouvelle configuration de deltaplane, de forme triangulaire, encore utilisée aujourd'hui.

b) Lors d'un vol en deltaplane, John utilise un appareil qui mesure la pression p de l'air en millibars pour obtenir l'altitude (*Höhe*) x en mètres (par rapport au sol). L'appareil utilise la formule suivante :

$$p = 978 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{8000}x}$$

Le nombre 978 correspond à la pression de l'air (en mbars) au niveau du sol et e est le nombre d'Euler.

i. Exprimer x en fonction de p **à la main**. Montrer les étapes de calcul. (2 P.)

ii. A quelle altitude la pression de l'air est-elle égale à la moitié de la pression au sol ? (1 P.)

iii. A quelle altitude la pression diminue-t-elle avec un taux instantané de $0{,}1$ mbar/m ? (1,5 P.)

iv. John effectue à présent sa descente pour atterrir. Son altitude diminue de 5 mètres par seconde. A l'altitude de $1'000$ m, il démarre un chronomètre (*Stoppuhr*). Quelle pression l'appareil devrait-il mesurer après 30 s de descente ? De manière plus générale, quelle pression devrait être mesurée après un temps t (en secondes) ? (1,5 P.)