gymnasium liestal

Maturitätsprüfungen 2015 – Mathematik schriftlich

Klassen: 4AW (Profil W), 4IM, 4S, 4SW, 4W, 4Z, 5KSW

Bemerkungen:	Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden.
	Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt!
Hilfsmittel:	Taschenrechner TI-Nspire CAS
	Der Rechner muss im Press-to-Test-Modus sein.
	Formelsammlung Fundamentum Mathematik und Physik, Orell Füssli Verlag, ohne Notizen

Aufgabe 1: Differential- und Integralrechnung

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{3}{2}x^2$$

Berechnen Sie die Teilaufgaben a) und b) von Hand.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen sowie die Hoch-, Tief- und Wendepunkte von f. (4 P.)

b) Der Graph von f schliesst mit der x-Achse eine endliche Fläche A ein. Eine Vertikale durch den Tiefpunkt teilt A in zwei Stücke. Bestimmen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte der beiden Stücke. (3 P.)

Gegeben ist die Funktionsschar

$$f_p(x) = \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{p}{2}x^2, \;\; p \neq 0$$

Für die Teilaufgaben c) bis e) dürfen Sie alle Möglichkeiten Ihres Taschenrechners ausschöpfen. Dokumentieren Sie Ihren Lösungsweg aber nachvollziehbar.

c) Zeigen Sie, dass jede Funktion der Schar entweder einen Hoch- oder Tiefpunkt hat, der nicht mit dem Ursprung zusammenfällt. Geben Sie an, für welche Wahl von p dieser Punkt ein Hoch- resp. Tiefpunkt ist. (2 P.)

d) Bestimmen Sie die Kurve, auf welcher alle Hoch- und Tiefpunkte der Schar liegen. (1.5 P.)

e) Für welche Werte von p nimmt die Funktion f_p im Wendepunkt die Steigung -2 an? (1.5 P.)

Aufgabe 2: Differential- und Integralrechnung

Gegeben ist die Funktion

$$g(x) = \frac{4}{x^2}$$

a) Die Eckpunkte eines Rechtecks sind wie folgt zu wählen:

- Eine Ecke bildet der Ursprung $O(0|0)$.
- Die dem Punkt O diagonal gegenüberliegende Ecke V liegt auf dem rechten Ast des Graphen von g.
- Die Seiten des Rechtecks sind parallel zur x- resp. y-Achse.

Stellen Sie den Sachverhalt in einer Skizze dar.
Bestimmen Sie die Breite und Höhe des Rechtecks mit minimalem Umfang. (4 P.)

b) Die Eckpunkte eines Dreiecks sind wie folgt zu wählen:

- Eine Ecke bildet der Ursprung $O(0|0)$.
- Eine Seite ist Tangente an den Graphen von g. Diese Seite schneidet die x- und die y-Achse. Diese Schnittpunkte sind die anderen beiden Ecken des Dreiecks.

Stellen Sie den Sachverhalt in einer Skizze dar.
Zeigen Sie, dass es kein solches Dreieck mit minimalem Flächeninhalt gibt. (4 P.)

Für $x \geq 1$ wird der Graph um die x-Achse rotiert. Es entsteht ein Trichter, der links bei $x = 1$ beschränkt ist, aber gegen rechts beliebig lang werden kann.

c) Wo wäre der Trichter rechts zu begrenzen, damit das Volumen den Wert 15 annimmt? (2 P.)

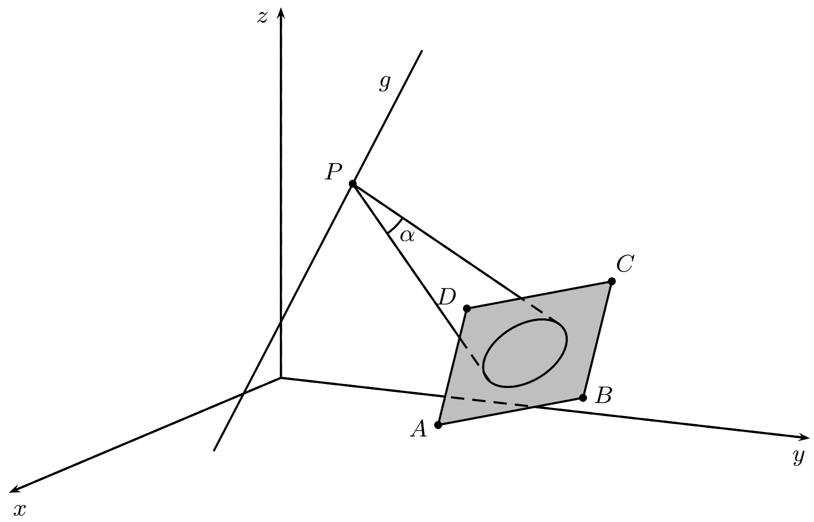
d) Welches Volumen kann ein solcher Trichter maximal annehmen? (2 P.)

Aufgabe 3: Vektorgeometrie

Eine rechteckige Leinwand wird von einem Scheinwerfer angestrahlt, der einen Lichtkegel erzeugt (siehe Abbildung). Die Punkte $A(8|20|0)$, $B(-4|26|0)$, $C(-2|30|12)$ und $D(10|24|12)$ bilden die Eckpunkte der Leinwand. Der Scheinwerfer kann an einer beliebigen Stelle eines Stahlseils befestigt werden, welches durch die Gerade g mit der Gleichung

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -15 \\ 7 \\ 34 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

dargestellt wird. Der Öffnungswinkel α des Scheinwerfers ist veränderbar.



Der Scheinwerfer befinde sich im Punkt $P(-9|1|16)$.

a) Weisen Sie nach, dass P auf g liegt. (1 P.)

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der rechteckigen Leinwand. (1 P.)

c) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der sich die Leinwand befindet. (2 P.)

Wenn Sie die Teilaufgabe c) nicht lösen können, verwenden Sie für E folgende Koordinatengleichung: $6x + 12y - 5z - 288 = 0$.

d) Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Ebene E. (1 P.)

e) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Leinwand in ihrem Mittelpunkt vom Scheinwerfer senkrecht angestrahlt wird. (2 P.)

f) Der Öffnungswinkel α des Scheinwerfers ist zunächst so gross eingestellt, dass die ganze Fläche der Leinwand beleuchtet ist. Dadurch wirft die Leinwand einen Schatten auf die x-y-Ebene. Bestimmen Sie den Eckpunkt C' des Schattens von C. (2 P.)

g) Der Öffnungswinkel α soll nun so verkleinert werden, dass die beleuchtete Fläche der Leinwand möglichst gross wird, jedoch kein Licht über die Ränder der Leinwand hinausfällt. Berechnen Sie die Grösse des entsprechenden Öffnungswinkels α. (3 P.)

Aufgabe 4: Stochastik

Ihre Mathematiklehrkraft hat zum Thema Wahrscheinlichkeitsrechnung 24 Standardaufgaben, aus denen sie für eine Prüfung jeweils 5 verschiedene Aufgaben auswählt.

a) Wie viele verschiedene Prüfungen lassen sich damit insgesamt erstellen, wenn die Reihenfolge der Aufgaben keine Rolle spielt? (1 P.)

b) Sie trauen sich zu, jede Aufgabe mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ richtig zu lösen.

   i. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie in einer Prüfung genau 3 Aufgaben richtig lösen? (1.5 P.)

   ii. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie in einer Prüfung mindestens 3 Aufgaben richtig lösen? (1.5 P.)

Tatsächlich sind unter den Standardaufgaben 8 leichte, 8 mittelschwere und 8 schwierige.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht eine Prüfung aus genau einer leichten und vier mittelschweren Aufgaben, wenn aus allen 24 Aufgaben zufällig ausgewählt wird? (2 P.)

Für die folgenden Teilaufgaben gilt: Die Prüfung besteht immer aus einer leichten und je zwei mittelschweren und schwierigen Aufgaben, alle jeweils zufällig ausgewählt. Die Prüfungsnote ist dann die Anzahl richtig gelöster Aufgaben plus Eins. Eine genügende Note bedeutet: mindestens 3 Aufgaben richtig gelöst, also eine Note 4, 5 oder 6.

d) Wie viele verschiedene solche Prüfungen lassen sich erstellen? (1.5 P.)

e) Sie lösen leichte Aufgaben immer richtig, im Mittel aber nur drei Viertel der mittelschweren Aufgaben. Die schwierigen Aufgaben gelingen Ihnen durchschnittlich nur in einem Viertel der Fälle. Wie stehen damit Ihre Chancen auf die Note 5 oder 6? (3 P.)

f) Nehmen Sie für diese Teilaufgabe an, dass Sie die Note 6 mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{256}$ erzielen. Wie oft müssten Sie eine solche Prüfung absolvieren, damit die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mindestens einmal die Note 6 erreicht haben, mindestens 90% beträgt? (1.5 P.)

Aufgabe 5: Trigonometrie und Exponentialfunktion

a) John[1] ist ein begeisterter und auch erfinderischer Deltasegler-Pilot. Das Basisrohr seines Seglers möchte er durch ein anderes ersetzen, das etwas länger ist als das originale. Bevor er die Änderung durchführt, möchte er aber die Flugsicherheit des neuen Designs überprüfen.

In der untenstehenden (nicht massstabgerechten) Figur ist die Geometrie des originalen Deltaseglers schwarz dargestellt. Die Höhe des gleichschenkligen Steuerbügels ABC beträgt $\overline{CM} = 1.60\,\text{m}$. Die Länge des originalen Basisrohrs ist $\overline{AB} = 1.20\,\text{m}$. Die Länge des Abschnitts $\overline{CD}$ misst $3.15\,\text{m}$.

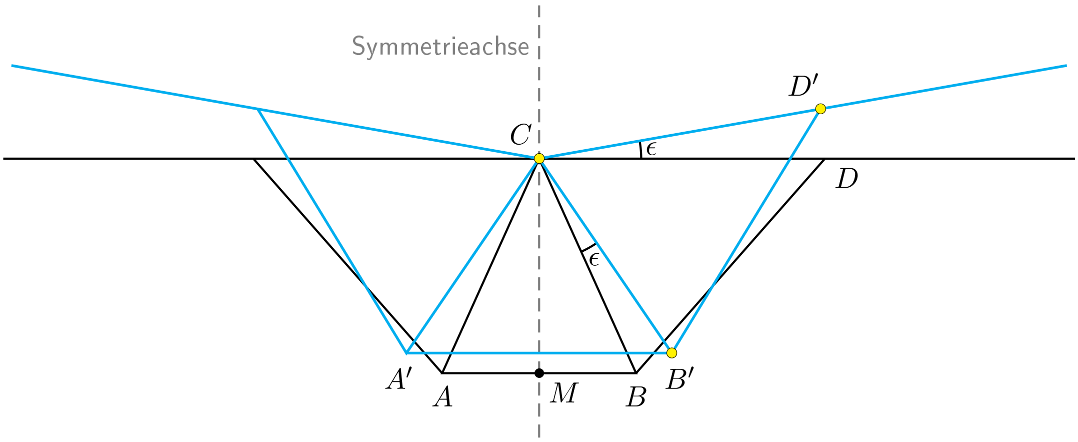
Blau dargestellt ist die veränderte Geometrie mit einem V-formigen Flügel. Das neue Basisrohr $\overline{A'B'}$ ist um $x = 6\,\text{cm}$ länger als das alte. Alle anderen Rohrlängen bleiben gleich.

Um die Sicherheit des neuen Flugels abschätzen zu können, hätte John gerne folgende Fragen beantwortet:

i. Wie gross ist der Anstellwinkel ϵ des Flügels bei Verwendung des längeren Basisrohrs?

ii. Wie gross sind die Winkel $\alpha = \angle D'B'C$ und $\beta = \angle B'CD'$?

Runden Sie alle Schlussergebnisse auf 2 Dezimalstellen genau. (6 P.)



Fortsetzung der Aufgabe 5 auf der Rückseite

[1] Den Piloten in dieser Aufgabe benennen wir nach dem australischen Erfinder John Dickenson (*1934), der im Jahr 1963 eine Steuerung für Deltasegler einführte, die noch bis heute verwendet wird.

b) Auf dem Flug verwendet John ein Messgerät, das den Luftdruck p in Millibar misst und die Höhe x in Meter über dem Erdboden anzeigt, wobei die Formel

$$p = 978 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{8000}x}$$

zu Grunde liegt. Die Zahl 978 steht für den Luftdruck auf dem Landeplatz in Millibar, e ist die Euler'sche Zahl.

i. Lösen Sie die Formel *von Hand* nach x auf. Dokumentieren Sie alle Schritte. (2 P.)

ii. Auf welcher Höhe ist der Luftdruck noch halb so gross wie auf dem Landeplatz? (1 P.)

iii. Auf welcher Höhe beträgt die momentane Luftdruckabnahme 0.1 mbar/m? (1.5 P.)

iv. John befindet sich auf einem Sinkflug und verliert pro Sekunde 5 m an Höhe. Auf der Höhe von 1000 m startet er seine Stoppuhr. Welchen Luftdruck zeigt sein Messgerät 30 s später an? Allgemeiner gefragt: Welchen Luftdruck zeigt sein Messgerät t Sekunden später an? (1.5 P.)