Maturité 2019 – Examen écrit de mathématiques

Classes : 4AM (profil M), 4BL (profil B), 4SIf

Enseignants : PeM, ZuA

Durée de l'examen :	4 heures
Remarque :	Commencer chaque exercice sur une nouvelle feuille.
Ressources autorisées :	Calculatrice TI-$n$spire CX, en mode *Press-to-Test*
	Formulaire (*Fundamentum Mathematik und Physik*), sans annotations
	Dictionnaire français-allemand

Pour les exercices qui doivent être résolus **à la main**, seules les fonctionnalités simples de la calculatrice sont autorisées. Pour obtenir la totalité des points de ces exercices, il faudra travailler **sans** utiliser les fonctions telles que *dotP*, *nSolve*, *polyRoots*, ainsi que le calcul numérique de dérivées ou d'intégrales.
La fenêtre graphique se limite quant à elle à la simple visualisation des graphes de fonctions.

Exercice 1 : Géométrie vectorielle

Soient les trois points $A(-3|-1|7)$, $B(7|4|-3)$ et $C(-3|14|-8)$.

(a) Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle en B. Les calculs doivent être faits **à la main**. (1,5 P.)

(b) Le point D, qui est sur l'axe y, est équidistant des points A et C. Calculer **à la main** les coordonnées de D. (2 P.)

(c) Déterminer une équation cartésienne du plan Π_1 qui contient les trois points A, B et C. (1,5 P.)

Si aucune réponse n'a été trouvée à la question (c), vous pouvez utiliser pour Π_1 l'équation cartésienne de remplacement suivante : $x + 2y + 2z - 18 = 0$.

(d) Montrer que le point $F\left(-\frac{5}{2}\middle|12\middle|\frac{19}{2}\right)$ n'appartient pas au plan Π_1. Calculer les coordonnées du point F', image du point F par la réflexion de plan Π_1. (3 P.)

On considère un autre plan $\Pi_2 : 2x - 5z + 3 = 0$.

(e) Expliquer pourquoi les plans Π_1 et Π_2 sont sécants (se coupent) puis calculer l'angle formé par ces deux plans. (2 P.)

(f) Déterminer une équation paramétrique d'une droite d qui ne coupe ni le plan Π_1 ni le plan Π_2. (2 P.)

Exercice 2.1 : Analyse

On considère la fonction f suivante :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

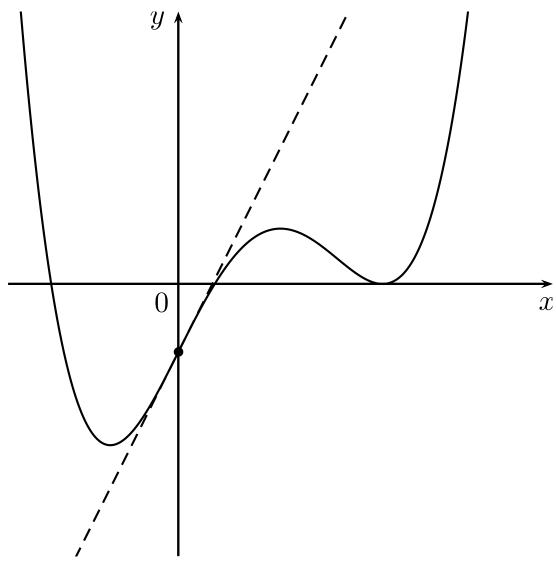
(a) Calculer **à la main** tous les zéros de f ainsi que les coordonnées des points maximums, des points minimums et des points d'inflexion du graphe de f. (4 P.)

(b) Calculer toutes les valeurs de x où la droite d d'équation $y = x$ coupe le graphe de f. (0,5 P.)

(c) Calculer **à la main** l'aire totale de la surface délimitée par la droite d et le graphe de f. (2,5 P.)

Exercice 2.2 : Analyse

La fonction h est représentée ci-dessous. Cette fonction est une fonction polynomiale de degré 4. Est également représentée en pointillés la droite d'équation $y = 2x - 2$. Les deux graphes se coupent sur l'axe y.



La droite est une tangente au graphe de h en un point d'inflexion de cette fonction. Enfin, le graphe de h présente en $x = -2$ et $x = 3$ des points extremums.

Déterminer l'expression de la fonction h.
Le système d'équations adéquat devra être résolu **à la main**. (5 P.)

Exercice 3 : Analyse

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{1-x}$$

où e est le nombre d'Euler.

(a) Où le graphe de f coupe-t-il l'axe y ? (0,5 P.)

(b) Plus les valeurs de x sont grandes, plus le graphe de f se rapproche de l'axe x. À partir de quelle valeur de x la valeur de $f(x)$ est-elle plus petite que $0{,}001$? Donner la solution **exacte**. Les calculs doivent être faits **à la main** pour obtenir tous les points. (1,5 P.)

(c) Déterminer une équation de la tangente au graphe de f en $x = -1$. (2 P.)

(d) Montrer que la fonction F définie par $F(x) = 2 - \mathrm{e}^{1-x}$ est une primitive de f. (0,5 P.)

(e) Calculer l'aire de la surface délimitée par le graphe de f et les axes x et y dans le premier quadrant. Donner le résultat **exact**. (1,5 P.)

On considère également pour la suite la fonction quadratique p définie par :

$$p(x) = 2x^2 - 1$$

(f) Les graphes de f et de p se coupent en un point P. Calculer l'angle formé par les deux graphes en ce point. (2 P.)

(g) Quels points du graphe de p sont les plus proches de l'origine[1] ? Les calculs doivent être faits **à la main** pour obtenir la totalité des points. (4 P.)

1. *Ursprung*

Exercice 4 : Probabilité

George, Charlotte et Louis cousent[2] des chemises[3] dans une fabrique de vêtements. La qualité de leur travail est régulièrement contrôlée.
Sur toutes les chemises qui sont cousues par George, 95 % respectent les critères de qualité de la fabrique. Pour Charlotte et Louis, les valeurs sont respectivement 90 % et 85 %.

(a) Louis coud 15 chemises. Calculer la probabilité que 12 de ces chemises exactement réussissent[4] le contrôle qualité. (1 P.)

(b) Combien de chemises Louis devrait-il coudre pour que la probabilité d'avoir au moins une chemise défectueuse[5] soit supérieure à 99 % ? (2 P.)

Un jour donné, George a cousu 20 chemises, contre 25 chemises pour Charlotte et 15 chemises pour Louis. Les 60 chemises sont clairement distinguables[6] les unes des autres.
Une inspectrice[7] choisit au hasard 10 de ces chemises pour le contrôle qualité, sans savoir qui les a cousues.

(c) Combien l'inspectrice a-t-elle de possibilités différentes pour choisir ces 10 chemises ? (1 P.)

(d) Calculer la probabilité qu'aucune de ces 10 chemises n'ait été cousue par Louis. (1,5 P.)

Sur les 10 chemises finalement choisies par l'inspectrice, trois proviennent de George, cinq de Charlotte et deux de Louis. L'inspectrice range au hasard ces 10 chemises en ligne et commence le contrôle.

(e) Avec quelle probabilité la première chemise réussit-elle le contrôle qualité ? (2 P.)

(f) Calculer la probabilité que les trois chemises cousues par George soient contrôlées en dernier. (1,5 P.)

(g) Quelle est la probabilité que toutes les 10 chemises réussissent le contrôle qualité ? (1,5 P.)

(h) Supposons que la première de ces chemises réussisse le contrôle qualité. Quelle est la probabilité qu'elle ait été cousue par Louis ? (1,5 P.)

2. *nähen*
3. *Hemden*
4. *bestehen*
5. *fehlerhaft*
6. *unterscheidbar*
7. *Inspektorin*

Exercice 5.1 : Combinatoire

L'organisation des élèves (Schülerorganisation - SO) du Gymnase de Liestal décide de mettre en couleurs le fameux logo de l'école :

gymnasiumliestal

Chacun des 16 caractères[8] doit être coloré[9] avec une des 19 couleurs provenant de la palette[10] de la SO.

(a) Combien de logos différents pourrait-on ainsi colorer ? (1 P.)

(b) Combien de possibilités reste-t-il si chaque couleur ne peut être utilisée qu'une seule fois ? (0,5 P.)

La SO présente en tout 24 propositions pour le nouveau logo du gymnase de Liestal. Ces propositions sont examinées par un jury de 10 personnes qui ont été choisies dans le corps enseignant[11] par le directeur[12].

Le corps enseignant comprend 81 femmes et 106 hommes, les cinq membres de la direction de l'école[13] compris[14], c'est-à-dire deux directrices adjointes[15], deux directeurs adjoints[16] et le directeur.

(c) Combien de jurys différents sont possibles ? (1 P.)

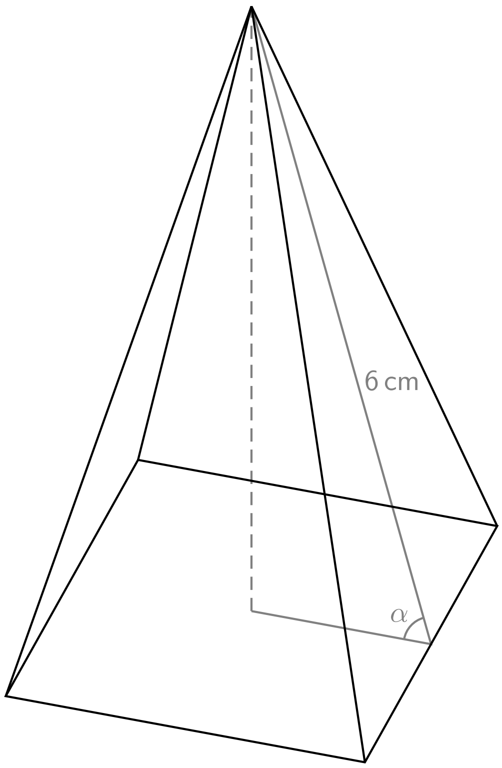
(d) Combien de jurys différents peut-on imaginer, si toute la direction doit faire partie du jury, et s'il doit y avoir dans le jury autant d'hommes que de femmes ? (2 P.)

---

8. *Buchstaben*
9. *eingefärbt*
10. *Farbkasten*
11. *Lehrerkollegium*
12. *Rektor*
13. *Schulleitung*
14. *inklusive*
15. *Konrektorinnen*
16. *Konrektoren*

Exercice 5.2 : Optimisation

Considérons une pyramide régulière à base carrée. Les faces latérales[17] sont des triangles de hauteur 6 cm. L'angle entre la base et chacune des faces latérales est noté α.



Indication : $(\sin(\alpha))^3$ s'écrit de manière simplifiée $\sin^3(\alpha)$.

(a) Montrer que le volume de la pyramide peut se calculer avec l'expression suivante : (3,5 P.)

$$V(\alpha) = 288\left(\sin(\alpha) - \sin^3(\alpha)\right)$$

Indication : pour obtenir cette expression, utiliser le fait que pour tout angle α on a : $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

(b) Calculer **à la main** l'angle α pour lequel le volume de la pyramide est maximal. (4 P.)

Indication : il n'est pas demandé de calculer la dérivée seconde de la fonction volume.

17. *Die Seitenflächen*