Maturitätsprüfungen 2019 – Mathematik schriftlich

Klassen: 4AM (Profil M), 4Ba, 4BL, 4KSW, 4SI, 4Wa, 4Wb, 4WZ
Lehrpersonen: ErM, HnR, KiA, KrD, PrG, SeM, SuF, ThF

Bemerkungen:	Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden.
	Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt!
Hilfsmittel:	Taschenrechner TI-*n*spire CX im Press-to-Test-Modus
	Formelsammlung *Fundamentum Mathematik und Physik*, ohne Notizen

In denjenigen Aufgaben, die **von Hand** gelöst werden müssen, sind nur die einfachen Funktionen Ihres Taschenrechners erlaubt. Um die volle Punktzahl für die jeweilige Aufgabe zu bekommen, müssen Sie auf Befehle wie dotP, nSolve, polyRoots oder das numerische Berechnen von Ableitungen und Integralen verzichten.

Im Allgemeinen beschränkt sich die Benutzung des Graphikfensters auf die Visualisierung von Funktionen.

Aufgabe 1: Vektorgeometrie

Gegeben sind die Punkte $A(-3|-1|7)$, $B(7|4|-3)$ und $C(-3|14|-8)$.

(a) Zeigen Sie rechnerisch **von Hand**, dass das Dreieck ABC gleichschenklig und beim Punkt B rechtwinklig ist. (1.5 P.)

(b) Der Punkt D auf der y-Achse befindet sich gleich weit entfernt von den Punkten A und C. Bestimmen Sie **von Hand** die Koordinaten vom Punkt D. (2 P.)

(c) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene $\mathcal{E}_1$, welche die drei Punkte A, B und C enthält. (1.5 P.)

Wenn Sie die Teilaufgabe (c) nicht lösen können, verwenden Sie für $\mathcal{E}_1$ die Ersatzgleichung $x + 2y + 2z - 18 = 0$.

(d) Zeigen Sie, dass der Punkt $F(-\frac{5}{2}|12|\frac{19}{2})$ nicht in der Ebene $\mathcal{E}_1$ liegt. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes F', den man durch Spiegelung von F an der Ebene $\mathcal{E}_1$ erhält. (3 P.)

Wir betrachten eine weitere Ebene $\mathcal{E}_2$ mit der Koordinatengleichung $2x - 5z + 3 = 0$.

(e) Woran erkennt man, dass die beiden Ebenen $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ sich schneiden? Berechnen Sie den Winkel zwischen den beiden Ebenen. (2 P.)

(f) Bestimmen Sie eine Parametergleichung einer Geraden g, die weder die Ebene $\mathcal{E}_1$ noch die Ebene $\mathcal{E}_2$ schneidet. (2 P.)

Aufgabe 2.1: Analysis

Betrachten Sie im Folgenden die Funktion

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

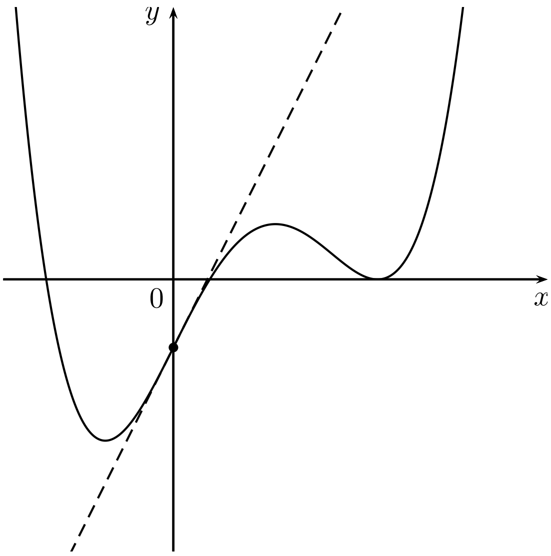
(a) Bestimmen Sie **von Hand** alle Nullstellen sowie die vollständigen Koordinaten der Hoch-, Tief- und Wendepunkte von f. (4 P.)

(b) Bestimmen Sie alle Stellen, an denen die Gerade g mit Gleichung $y = x$ den Graphen von f schneidet. (0.5 P.)

(c) Berechnen Sie **von Hand** den Inhalt der Fläche, die von der Geraden g und dem Graphen von f komplett eingeschlossen wird. (2.5 P.)

Aufgabe 2.2: Analysis

Unten abgebildet ist der Graph einer Polynomfunktion h vierten Grades sowie die gestrichelte Gerade mit Gleichung $y = 2x - 2$. Die beiden Graphen schneiden sich auf der y-Achse.



Die gestrichelte Gerade ist eine Wendetangente des Graphen von h. Bei $x = -2$ und $x = 3$ hat der Graph von h Extremalpunkte.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von h. Lösen Sie das zugehörige Gleichungssystem **von Hand**. (5 P.)

Aufgabe 3: Analysis

Gegeben sei eine Funktion

$$f(x) = \mathrm{e}^{1-x}$$

wobei e die Eulersche Zahl bezeichnet.

(a) Wo schneidet der Graph von f die y-Achse? (0.5 P.)

(b) Für immer grössere x-Werte nähert sich der Graph von f der x-Achse an. Ab welchem Wert von x ist der Funktionswert $f(x)$ kleiner als 0.001? Um die volle Punktzahl für diese Teilaufgabe zu bekommen, müssen Sie diese Teilaufgabe **von Hand** lösen. Geben Sie die exakte Lösung an. (1.5 P.)

(c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = -1$. (2 P.)

(d) Zeigen Sie, dass die Funktion $F(x) = 2 - \mathrm{e}^{1-x}$ eine Stammfunktion von f ist. (0.5 P.)

(e) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die im ersten Quadranten zwischen dem Graphen von f und den Koordinatenachsen liegt. Geben Sie die Lösung **exakt** an. (1.5 P.)

In den folgenden Teilaufgaben betrachten wir zusätzlich die quadratische Funktion

$$p(x) = 2x^2 - 1$$

(f) Die Graphen von f und p schneiden sich. Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen den beiden Graphen. (2 P.)

(g) Welche Punkte des Graphen von p sind dem Ursprung am nächsten? Um die volle Punktzahl zu bekommen, muss diese Aufgabe **von Hand** gelöst werden. (4 P.)

Aufgabe 4: Stochastik

George, Charlotte und Louis nähen Hemden in einer Kleiderfabrik. Die Qualität ihrer Arbeit wird durch Inspektionen regelmässig kontrolliert. Von den Hemden, die George näht, erfüllen 95% die Qualitätsstandards der Fabrik. Die entsprechenden Prozentzahlen für Charlotte und Louis sind 90% bzw. 85%.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 15 von Louis genähten Hemden genau 12 die Qualitätskontrolle bestehen. (1 P.)

(b) Ab wie vielen von Louis hergestellten Hemden kann man mit über 99%-iger Wahrscheinlichkeit damit rechnen, dass mindestens ein Hemd fehlerhaft ist? (2 P.)

Im Lauf eines gewissen Tages näht George 20 Hemden, während Charlotte 25 und Louis 15 Hemden nähen. Alle 60 Hemden sind voneinander klar unterscheidbar. Die Inspektorin wählt zufällig insgesamt 10 dieser Hemden für die Qualitätskontrolle aus, ohne zu wissen, von wem sie stammen.

(c) Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat die Inspektorin, die Auswahl der 10 Hemden zu treffen? (1 P.)

(d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass keines der 10 ausgewählten Hemden von Louis stammt. (1.5 P.)

Tatsächlich stammen von den 10 ausgewählten Hemden drei von George, fünf von Charlotte und zwei von Louis. Die Inspektorin ordnet die 10 Hemden zufällig in einer Reihe und beginnt die Kontrolle.

(e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das erste Hemd die Qualitätskontrolle besteht? (2 P.)

(f) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die drei zuletzt inspizierten Hemden von George stammen. (1.5 P.)

(g) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle 10 Hemden die Qualitätskontrolle bestehen? (1.5 P.)

(h) Angenommen, das erste Hemd besteht die Qualitätskontrolle. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es von Louis stammt? (1.5 P.)

Aufgabe 5.1: Kombinatorik

Die Schülerorganisation (SO) des Gymnasiums Liestal entscheidet sich, das Ihnen wahrscheinlich bekannte Logo

gymnasium liestal

bunter zu gestalten. Jeder der 16 Buchstaben wird in einer der 19 Farben aus dem Farbkasten der SO eingefärbt.

(a) Auf wie viele Arten kann das Logo unter diesen Voraussetzungen gestaltet werden? (1 P.)

(b) Wie viele Möglichkeiten bleiben, wenn jede Farbe höchstens einmal verwendet werden darf? (0.5 P.)

Die SO reicht insgesamt 24 Vorschläge für das neue farbige Logo des Gymnasiums Liestal ein. Die Vorschläge für das neue Logo werden von einer zehnköpfigen Jury bewertet, die der Rektor aus dem Lehrerkollegium zusammenstellt.

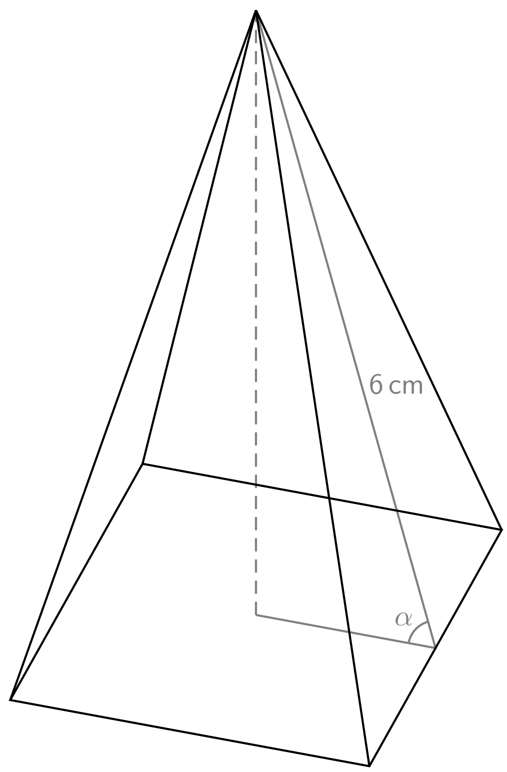
Das Lehrerkollegium umfasst 81 Frauen und 106 Männer, inklusive der fünfköpfigen Schulleitung, die aus zwei Konrektorinnen, zwei Konrektoren und dem Rektor besteht.

(c) Wie viele verschiedene Jurys sind denkbar? (1 P.)

(d) Wie viele verschiedene Jurys sind denkbar, wenn die gesamte Schulleitung zur Jury gehören und die Jury insgesamt aus gleichviel Frauen wie Männern bestehen soll? (2 P.)

Aufgabe 5.2: Optimierung

Gegeben ist eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die Seitenflächen sind Dreiecke, deren Höhe jeweils 6 cm beträgt. Der Winkel zwischen der Grundfläche und einer Seitenfläche wird mit α bezeichnet.



Hinweis: Wir verwenden im Folgenden die Kurzschreibweise $\sin^3(\alpha)$ *für* $(\sin(\alpha))^3$.

(a) Zeigen Sie, dass das Volumen der Pyramide durch die folgende Formel berechnet werden kann:

$$V(\alpha) = 288\left(\sin(\alpha) - \sin^3(\alpha)\right)$$

Hinweis: Beachten Sie bei der Herleitung der obigen Volumenformel, dass für jeden Winkel α *die Beziehung* $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ *gilt.* (3.5 P.)

(b) Berechnen Sie **von Hand**, bei welchem Winkel α die Pyramide das grösste Volumen aufweist.

Hinweis: Die zweite Ableitung der Volumenfunktion muss nicht betrachtet werden. (4 P.)