# Maturitätsprüfungen 2019 - Mathematik schriftlich

**Klassen: 4A, 4A(M)** (FrC, PrG)

Prüfungsdauer: 4h

Maximalpunktzahl: 61 Punkte

Erlaubte Hilfsmittel: TI NSpire CX CAS-Taschenrechner im Press-To-Test-Modus mit Anleitung und gegebenenfalls nicht-Grafik/CAS-fähiger Taschenrechner Formelsammlung (*Formeln, Tabellen, Begriffe*, Orell Füssli).

Bemerkungen: Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
Die Arbeit mit dem Taschenrechner muss dokumentiert sein.
Bei jeder Aufgabe steht die maximale Punktzahl.

---

**Grundsatz: Wenn in einer Aufgabe oder Teilaufgabe keine expliziten einschränkenend Anweisungen zur Taschenrechnerverwendung angegeben sind, darf der Rechner uneingeschränkt eingesetzt werden.**

## Aufgabe 1 - Analysis (13 Punkte)

Die folgenden zwei Teilaufgaben sind voneinander unabhängig.

(a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{x^4 - 5x^2 + 4}{4x^2 + 4x - 24}$.

*Die Teilaufgaben i-iv sind ohne die CAS-Funktionen des Taschenrechners zu lösen.*

i. Bestimmen Sie die Definitionslücken und die Nullstellen des Graphen von $f(x)$. (2.5 P.)

ii. Bestimmen Sie die Art der Unstetigkeitsstellen des Graphen von $f(x)$ und das Verhalten der Funktion in der Nähe dieser Stellen. (1.5 P.)

iii. Der Graph von $f(x)$ nähert sich für grosse $x$ asymptotisch dem Graphen eines Polynoms $p(x)$. Wie lautet die Funktionsgleichung von $p(x)$? (2 P.)

iv. Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x)$. (2 P.)

(b) Gegeben seien die Funktionen $g(x) = (1-x) \cdot e^{-3x}$ und $h(x) = \dfrac{g(x)}{2}$

i. Berechnen Sie *ohne die CAS/Numerik-Funktionen des Taschenrechners zu benutzen* den Inhalt der Fläche zwischen den Graphen von $g(x)$ und $h(x)$ im ersten Quadranten. (3.5 P.)

ii. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, welcher ensteht, wenn die Fläche zwischen den Graphen von $g(x)$ und $h(x)$ im ersten Quadranten um die $x$-Achse gedreht wird. (*CAS-Einsatz erlaubt*) (1.5 P.)

**Aufgabe 2 - Analysis** (12 Punkte) Wir betrachten die Funktion

$$f_a(x) = (a^2 - 1) \cdot x^2 + 2 \cdot (a - 1) \cdot x + 1.$$

*Die folgenden Teilaufgaben sind ohne die CAS-Funktionen des Taschenrechners zu lösen. Die entsprechenden Zwischenschritte müssen vorhanden sein.*

(a) Berechnen Sie die Nullstellen dieser Funktion in Abhängigkeit des Parameters $a$. Für welche Werte von $a$ gibt es keine, eine oder zwei Nullstellen? Gibt es Sonderfälle? (5 P.)

(b) Berechnen Sie die Koordinaten aller Extremal**punkte** von $f_a(x)$. Existieren diese für alle Werte von $a$? (2 P.)

(c) Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve, auf welcher sich die gefundenen Extremalpunkte bewegen, wenn man den Wert von $a$ ändert. Wenn der Parameter $a$ alle möglichen Werte annimmt, wird dann jeder Punkt dieser Ortskurve erreicht? (2 P.)

Die folgende Teilaufgabe soll mit dem CAS bearbeitet werden. Dokumentieren Sie die Zwischenschritte und Zwischenresultate!

(d) Der Graph von $f$ schliesst mit der $x$-Achse für $-1 < a < 1$ einen Flächeninhalt $A(a)$ ein. Bestimmen Sie den Wert von $a$ so, dass $A(a)$ ein Minimum annimmt. (3 P.)

**Aufgabe 3 - Vektorgeometrie** (11 Punkte)

Gegeben sind die drei Punkte $A(8|6|1)$, $B(5|11|9)$ und $C(0|3|6)$, sowie eine Ebene $E$ mit der Gleichung $E: 41x + 46y - 191z + 2429 = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass der Schwerpunkt $S$ des Dreiecks $ABC$ bei $S\left(\frac{13}{3}\middle|\frac{20}{3}\middle|\frac{16}{3}\right)$ liegt. (1 P.)

(b) Berechnen Sie die Koordinatengleichung der Ebene $F$ durch die Punkte $ABC$. Überprüfen Sie Ihr Resultat, indem Sie die Koordinaten der drei Punkte in die gefundene Gleichung einsetzen! (2 P.)

(c) Das Dreieck $ABC$ sei die Seitenfläche eines regelmässigen Tetraeders. Berechnen Sie die Koordinaten der möglichen fehlenden Ecken $D$. (2.5 P.)

Wir betrachten nun ein anderes (nicht regelmässiges) Tetraeder mit derselben Grundfläche $ABC$, dessen Spitze $Z$ in der Ebene $E$ und auf dem Lot zur Grundfläche durch den Schwerpunkt $S$ liegt.

(d) Berechnen Sie die Koordinaten dieser Spitze. (1.5 P.)

Falls Sie keine Lösung für die Spitze $Z$ gefunden haben, rechnen Sie mit $Z(20|-9|21)$ weiter.

(e) Berechnen Sie das Volumen dieses Tetraeders auf zwei verschiedene Arten. (3 P.)

(f) Bestimmen Sie den Neigungswinkel der Kante $AZ$ gegenüber der Grundfläche $ABC$. (1 P.)

**Aufgabe 4 - Stochastik** (12 Punkte)

Eine Streaming-Playlist enthält 100 verschiedene Songs. Diese verteilen sich wie folgt auf verschiedene Musikstile:

| Rock | Jazz | Blues | Reggae |
|---|---|---|---|
| 40 | 30 | 10 | 20 |

Wir nehmen an, dass die Stücke aus der Liste in vollkommen zufälliger Reihenfolge abgespielt werden. **Es ist also auch möglich, dass dasselbe Stück mehrfach hintereinander gespielt wird.**

(a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass als erstes gerade dreimal dasselbe Stück gespielt wird? (0.5 P.)

(b) Wenn alle 100 Stücke zufällig hintereinander abgespielt werden, ohne dass ein Stück wiederholt wird, wie wahrscheinlich ist es dann, dass erst alle Rock-Songs, dann alle Jazz-Songs, dann die Blues-Songs und am Schluss die Reggae-Songs zu hören sind? (1 P.)

**Bei den weiteren Teilaufgaben ist es wieder möglich, dass dasselbe Stück mehrfach gespielt wird.**

(c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in den ersten zehn gespielten Stücken gerade die Verteilung der Musikstile in der Playlist widergespiegelt ist, dh 4 Rock, 3 Jazz, 1 Blues, 2 Reggae, nicht notwendigerweise in dieser Reihenfolge? (1.5 P.)

(d) Wie viele verschiedene Verteilungen von Musikstilen innerhalb der ersten zehn Stücke sind möglich, wenn wir die Reihenfolge ignorieren? (1 P.)

(e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den ersten zwanzig gespielten Songs mindestens drei Rock-Stücke sind? (2 P.)

(f) Nehmen wir an, dass alle Rock-Songs drei Minuten, die Jazz-Songs sechs Minuten, die Blues-Songs fünf Minuten und die Reggae-Songs vier Minuten Spieldauer haben.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der totalen Spieldauer zweier nacheinander gespielter Stücke. (3 P.)

Welchen Erwartungswert hat dann die Spieldauer zweier zufällig nacheinander gespielter Stücke? (1 P.)

(g) Wir können für das Abspielen eine Option wählen, die bestimmt, mit welcher Wahrscheinlichkeit nach einem bestimmten Stil ein anderer gespielt wird. Nehmen wir an, wir hätten folgende Einstellung programmiert:

| | |
|---|---|
| Nach Rock: | je zu 50% Jazz, 30% Blues, 20% Reggae |
| Nach Jazz: | je zu 60% Blues, 40% Reggae |
| Nach Blues: | je zu 70% Jazz, 20% Rock, 10% Reggae |
| Nach Reggae: | je zu 40% Rock, 20% Jazz, 40% Blues |

Das zweite gespielte Stück ist ein Blues. Mit welcher Wahrscheinlichkeit lief als erstes ein Reggae-Song? (2 P.)

**Aufgabe 5 - Vermischte Aufgaben** (13 Punkte)

Die folgenden Aufgaben sind unabhängig voneinander.

(a) **Folgen und Reihen**

Die Folge $(a_n)$ ist definiert durch

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

i. Berechnen Sie die Folgenglieder $a_1$ bis $a_4$ und erraten Sie daraus eine Formel zur direkten Berechnung von $a_n$. (2 P.)

ii. Beweisen Sie (ohne den Taschenrechner zu benutzen) die Gültigkeit der vermuteten Formel mit Hilfe einer vollständigen Induktion. (3 P.)

(b) **Komplexe Funktionen**

Wir betrachten die komplexe Funktion mit der Gleichung $f(z) = i \cdot (z + \overline{z}) + i \cdot \dfrac{z - \overline{z}}{4}$.

*Alle Berechnungen in Teilaufgaben i-iii sind vollständig von Hand ohne Taschenrechner durchzuführen.*

i. Berechnen Sie die Fixpunktmenge der Funktion $f(z)$. (1.5 P.)

ii. Zeigen Sie, dass das Bild des Einheitskreises ($\{a + i \cdot b \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1\}$) in der komplexen Zahlenebene unter der Funktion $f(z)$ eine Ellipse ist, dh durch eine Ellipsengleichung beschrieben wird und stellen Sie diese auf.
Skizzieren Sie diese Ellipse in der Gaussebene. (2.5 P.)

iii. *Unabhängig von den obigen Teilaufgaben:*
Berechnen Sie alle Fixpunkte der Funktion $g(z) = \dfrac{6}{i \cdot z + (2 - 3i)}$. (4 P.)