gymnasium liestal

Maturitätsprüfungen 2014 – Mathematik schriftlich

Klassen 4AW (Profil A), 4Ba

Bemerkungen:	Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden.
	Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt!
Hilfsmittel:	TI NSpire CAS oder Voyage 200 und ihre Formelsammlung
	(Formeln, Tabellen, Begriffe oder Fundamentum).
	Der Rechner muss im Press-to-Test-Modus sein.
	Sie dürfen Ihr Taschenrechnerhandbuch benutzen (keine Notizen darin!).

Punkteverteilung:

1	2	3	4	5	Total
12	12	12	12	12	60

Aufgabe 1 - Vektorgeometrie

Gegeben sind die Punkte $A(15|-15|8)$, $B(-1|15|-4)$ sowie $C(5|-7.5|13)$.

1. *Diese Teilaufgabe ist ohne Taschenrechner zu bearbeiten:*

   Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g_1 durch die Punkte A und B. Zeigen Sie rechnerisch, dass der Punkt C nicht auf g_1 liegt. (1.5 P.)

2. Bestimmen Sie den Abstand vom Punkt C zur Geraden g_1. (1 P.)

3. Stellen Sie eine Gleichung der Geraden g_2 auf, welche zu g_1 parallel ist und den Punkt C enthält. (0.5 P.)

4. Die Kugel K, deren Mittelpunkt sich Anfangs bei $M(4|0|6)$ befindet, hat einen Durchmesser von 10 Längeneinheiten. Zeigen Sie, dass die Kugel K die Gerade g_1 berührt und geben Sie die Koordinaten dieses Berührpunktes Q_1 an. (2 P.)

5. Die beiden parallelen Geraden g_1 und g_2, die beide die Kugel K berühren, dienen als Schienen, auf denen sich die Kugel K entlang bewegt.

   (a) Geben Sie eine Gleichung der Geraden h an, auf der sich der Mittelpunkt der Kugel K bewegt, wenn die Kugel entlang den Schienen abrollt. (0.5 P.)

   (b) An welchem Ort P befindet sich der Mittelpunkt der Kugel, wenn die Kugel auf die x_1-x_2-Ebene stösst? (3 P.)

   (c) Wo genau berührt die Kugel die x_1-x_2-Ebene? (1 P.)

6. Die Kugel K wird nach dem Reflexionsgesetz (Einfallswinkel und Reflexionswinkel sind gleich gross) von der x_1-x_2-Ebene reflektiert. Geben Sie die Grösse des Reflexionswinkels β im Gradmass auf 4 Nachkommastellen genau an. (2.5 P.)

Aufgabe 2 - Analysis

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 8}{4 \cdot (x - 2)}$.

1. Untersuchen Sie die Funktion auf Asymptoten und geben Sie deren Gleichungen an. (1 P.)

2. *Diese Teilaufgabe ist ohne Taschenrechner zu bearbeiten:*

   Bestimmen Sie die erste Ableitung $f'(x)$ und berechnen Sie die Koordinaten der Punkte des Graphen von f, an denen die Tangente parallel zur x-Achse verläuft. (3 P.)

3. Die beiden Äste des Graphen von f stellen modellhaft den Verlauf zweier Strassen dar. Im Punkt $A(2|2.5)$ befindet sich die Ecke eines Hauses.

   Von der Hausecke im Punkt A soll ein möglichst kurzer Zufahrtsweg zu einer der vorhandenen Strassen gebaut werden. Bestimmen Sie rechnerisch, zu welcher der beiden Strassen die Verbindung am kürzesten ist und berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, an dem der Zufahrtsweg dann auf die Strasse trifft. Geben Sie das Resultat auf drei Nachkommastellen genau an. (2.5 P.)

Erweitern wir die Funktion f zu einer Funktionenschar $f_t(x) = \dfrac{x^2 + tx + 4t}{4 \cdot (x - t)}$ mit dem Parameter $t > 0$.

4. Bestimmen Sie die Nullstellen der Schar und diskutieren Sie deren Anzahl in Abhängigkeit von t. (2 P.)

5. Alle Graphen der Schar besitzen zwei gemeinsame Punkte. Bestimmen Sie die Koordinaten dieser beiden Punkte. (1.5 P.)

6. *Diese Teilaufgabe ist ohne Taschenrechner zu bearbeiten:*

   Zeigen Sie, dass für $x > t$ die Funktion $F_t(x) = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}tx + \frac{1}{2}t(t+2) \cdot \ln(x - t)$ eine Stammfunktion von $f_t(x)$ ist. (2 P.)

Aufgabe 3 - Analysis

Die oben abgebildete Lupu Brücke in Shanghai gehört zu den grössten Bogenbrücken der Welt. In einem Koordinatensystem (eine Einheit entspricht einem Meter) kann der Bogen der Brücke durch den Graphen der Funktion

$$g(x) = 500 - 200 \cdot \left(e^{\frac{x}{400}} + e^{-\frac{x}{400}}\right)$$

sehr genau wiedergegeben werden. Die Wasseroberfläche liegt bei $y = 0$. Wie $g(x)$ im Koordinatensystem liegt, werden sie an Hand der folgenden Aufgaben untersuchen.
Dabei sind die Teilaufgaben 1. bis 4. ohne Taschenrechner zu lösen, Teilaufgaben 5. und 6. mit Taschenrechner!

1. Untersuchen Sie $g(x)$ auf Symmetrie. (1 P.)

2. Berechnen Sie von Hand die erste und die zweite Ableitung von $g(x)$. *(Hinweis: Der Taschenrechner würde Ihnen hier eine Funktion als Antwort geben, die sie möglicherweise gar nicht kennen!)* (1.5 P.)

3. Untersuchen Sie $g(x)$ auf Extremal- und Wendepunkte und bestimmen Sie deren Koordinaten. *(Hinweis: Sollten Sie entgegen den Anweisungen diese Teilaufgabe nur mit dem Taschenrechner lösen können, erhalten Sie maximal 1.5 P.)* (3 P.)

4. Berechnen Sie die Spannweite des Bogens. Es wird ein exaktes Schlussresultat verlangt. *(Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $u = e^{\frac{x}{400}}$.)* (2.5 P.)

5. Die Fahrbahn der Lupu-Brücke befindet sich in 46 m Höhe über dem Wasser und darf näherungsweise als horizontal angenommen werden. Geben Sie das Integral an, das die Querschnittsfläche eingegrenzt durch Fahrbahn, Brückenbogen und Wasseroberfläche berechnet. Berechnen Sie diese Querschnittsfläche auf den Quadratmeter genau. (2 P.)

6. Wir betrachten nun eine allgemeine Brückenbogenfunktion
$$g_{a,b}(x) = b - \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$
Die eingangs betrachtete Funktion $g(x)$ ist ein Spezialfall dieser allgemeinen Funktion. Gesucht sind a und b für einen Bogen, der eine Spannweite von 100 m hat und mit der Wasseroberfläche einen Winkel von 45° einschliesst. (2 P.)

Aufgabe 4 - Stochastik

Ein Mensabetreiber kauft für seine Kunden täglich Obstkisten ein. Jede Obstkiste enthält genau 18 Äpfel, 7 Birnen, 5 Orangen und 10 Bananen.

1. Martin wählt für seine sieben Kollegen und sich aus einer **einzigen** vollen Obstkiste genau 8 Früchte **zufällig** aus:

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden nur Äpfel gezogen? (1 P.)

   (b) Wie viele Obststücke müsste Martin aus dem Obstkorb mindestens mitbringen, damit mit einer Sicherheit von mindestens 99.9% mindestens eine Orange für seine Kollegin Karin dabei wäre? (2 P.)

   (c) Bei den ersten 6 gezogenen Obststücken von Martin war keine Banane dabei. Nun zieht er noch die letzten beiden Früchte. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter diesen beiden Früchten mindestens eine Banane ist? (1 P.)

   (d) Martin hat zufällig gezogen und genau 5 Äpfel, 2 Bananen und 1 Birne aus der Obstkiste für sich und seine Kolleginnen und Kollegen ausgewählt: Auf wie viele Arten kann Martin die Früchte an alle Freunde verteilen, wenn jede Person ein Obststück bekommt und die einzelnen Äpfel, Bananen und Birnen jeweils alle voneinander unterscheidbar sind? (1 P.)

   (e) Wie verändert sich diese Anzahl an Verteilungsmöglichkeiten aus der vorhergehenden Teilaufgabe, wenn man die Obststücke einer jeden Obstsorte nicht unterscheiden kann? (1 P.)

2. Der Mensabetreiber führt eine Marktanalyse bezüglich des täglichen Obstverkaufs durch, da die Nachfragemenge an Obstkisten täglich schwankt:

Anzahl der täglich nachgefragten Obstkisten	0	1	2	3	4	5
Zugehörige Wahrscheinlichkeit	0.02	0.03	0.20	0.30	0.35	0.10

   Der Mensabetreiber möchte einen möglichst hohen Nettogewinn aus dem Obstverkauf erzielen. Auf Grund der obigen Marktanalyse erwägt der Mensabetreiber 3 oder 4 Kisten Obst täglich zu bestellen, ist sich aber unsicher, für welche Variante er sich konkret entscheiden sollte. Der Einkaufspreis einer vollen Kiste Obst beträgt 15 CHF. Der Verkaufspreis eines jeden Obststückes aus der Kiste beträgt 1 CHF.

   (a) Im Folgenden beschreibt die Zufallsgrösse X den Nettogewinn, der dem Mensabetreiber nach dem Einkauf von 4 Obstkisten und dem anschliessenden Verkauf der Früchte in der Mensa bleibt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

   Stellen Sie auch die Wahrscheinlichkeitsverteilung Y des erzielten Nettogewinns beim Einkauf von "nur" 3 Obstkisten auf. (3 P.)

   (b) Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsgrösse X gilt: $E(X) \approx 65$ CHF und $\sigma_X \approx 39$ CHF. (2 P.)

   (c) *Hinweis: Für die Zufallsgrösse Y gilt:* $E(Y) \approx 64$ *CHF und* $\sigma_Y \approx 25$ *CHF*

   Der Mensabetreiber entscheidet sich für den Einkauf von "nur "3 Kisten statt 4 Kisten Obst. Begründen Sie in Worten, inwiefern diese Entscheidung sinnvoll ist. (1 P.)

Aufgabe 5 - Vermischtes

Diese Aufgabe besteht aus zwei, voneinander unabhängigen Teilaufgaben.

1. *Diese Teilaufgabe ist ohne Taschenrechner zu bearbeiten:*

   Es gelte $f(x) = (x^2 + x) \cdot e^x$.

   (a) Bestimmen Sie die ersten vier Ableitungen von f. (1 P.)

   (b) Finden Sie einen geeigneten Funktionsterm für die n-te Ableitung $f^{(n)}(x)$. (2 P.)

   (c) Beweisen Sie mit Hilfe der Vollständigen Induktion, dass dieser Term für jede natürliche Zahl n richtig ist. (3 P.)

2. *Diese Teilaufgabe ist ohne Taschenrechner zu bearbeiten. Das Integral ist von Hand zu lösen ohne Formelsammlung, dass heisst alle relevanten Zwischenschritte müssen vorhanden sein. Das Resultat kann aber mit Formelsammlung und Taschenrechner kontrolliert werden:*

   Wie gross ist das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn man den Graphen der Sinusfunktion - begrenzt von zwei benachbarten Nullstellen - um die x-Achse rotieren lässt? (6 P.)

Viel Erfolg wünschen Ihnen Dennis Krüger, Andreas Kilberth und Christian Freiburghaus.