gymnasium liestal

Maturitätsprüfungen 2013 - Mathematik schriftlich
Klassen: 4A, 4A(Z), 4Ba, 4Bb (MoM, RaM, KrD, HuR)

Prüfungsdauer:	4h
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner (inkl. TI-Nspire CAS) mit Anleitung Formelsammlung
Bemerkungen:	Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt. Die Arbeit mit dem Taschenrechner muss dokumentiert sein. Bei jeder Aufgabe steht die maximale Punktezahl.

Aufgabe 1 - Analysis (12 Punkte)

Die Funktion f ist durch

$$f(x) = \frac{4}{2+\cos(\frac{\pi}{2}x)} \qquad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}$$

gegeben, wobei x im Bogenmass angegeben ist.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $I_1 = [-4; 4]$ und untersuchen Sie die Funktion f auf Definitionslücken. (1.5 P.)

(b) Begründen Sie, ohne den Taschenrechner zu verwenden, welchen Wertebereich die Funktion f aufweist. (1 P.)

(c) Berechnen Sie die Koordinaten aller Hoch- und Tiefpunkte vom Graph der Funktion f. (2 P.)

(d) Im Intervall $I_2 = [-2; 2]$ soll f durch ein Polynom 2. Grades p angenähert werden, das mit f an den Stellen $-2, 0$ und 2 übereinstimmt.

(i) Bestimmen Sie einen geeigneten Funktionsterm für $p(x)$. (1 P.)

(ii) *Geben Sie die Lösung auf 3 Nachkommastellen genau an.* (2 P.)
An welchen Stellen des Intervalls I_2=$[-2; 2]$ weicht die Näherungsfunktion p in y-Richtung am stärksten von der Funktion f ab und wie gross ist die Abweichung an diesen Stellen?

(e) Der Graph von f rotiert über dem Intervall $I_3 = [0; 4]$ um die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{4}{3}$. Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers über den Intervall I_3. (1.5 P.)

(f) Wir betrachten nun Tangenten von f, die durch den Ursprung gehen.

(i) *Geben Sie die Lösung auf 3 Nachkommastellen genau an.*
Berechnen Sie die Funktionsgleichungen von vier solcher Tangenten. (2 P.)

(ii) *Begründen Sie Ihre Antwort nur durch graphische Interpretation.*
Wie viele Tangenten, die durch den Ursprung gehen, gibt es, deren Berührungspunkte im Intervall $I_4 = [0; 16]$ liegen? (1 P.)

Aufgabe 2 - Vektorrechnung (12 Punkte)

Gegeben sind die Kugel K, die Ebene E_1, die Gerade g sowie der Punkt P:

$$K:\quad x^2+y^2+z^2-8x-4y+6z-260=0,$$

$$E_1:\quad x-2y+2z-39=0,$$

$$g:\quad \vec{r}=\begin{pmatrix}-11\\4\\31\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}6\\-4\\1\end{pmatrix}\quad \text{sowie}$$

P(-2|4|37).

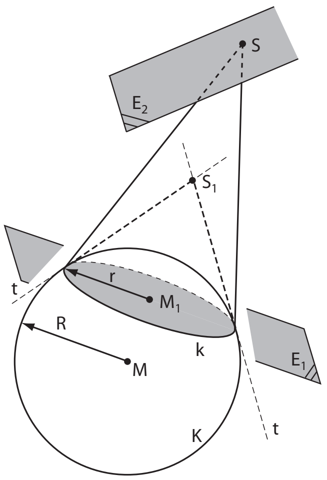
(a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M und den Radius R der Kugel K. (1 P.)

(b) Sei die Ebene E_2 diejenige Ebene, in welcher sich sowohl die Gerade g als auch der Punkt P ($P \notin g$) befinden. Zeigen Sie, dass die Ebene E_2 durch die Koordinatengleichung $8x+9y-12z+424=0$ beschrieben wird. (2 P.)

(c) Diese Ebene E_2: $8x+9y-12z+424=0$ schneidet die gegebene Ebene E_1 unter einem Winkel. Geben Sie den Schnittwinkel dieser beiden Ebenen E_2 und E_1 auf eine Nachkommastelle genau an. (1 P.)

Wenn Sie in Teilaufgabe (a) den Mittelpunkt M und den Radius R der Kugel K nicht bestimmen konnten, benutzen Sie im Folgenden die Ersatz-Kugel mit dem Mittelpunkt M_E(4|2|-3) und dem Radius $R_E=17$.

(d) Die Ebene E_2 schneidet die Kugel K nicht. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q der Kugel K, welcher den geringsten Abstand zur Ebene E_2 besitzt. (3 P.)



(e) Zeigen Sie, dass die Ebene E_1 die Kugel K schneidet. Alle gemeinsamen Punkte von E_1 und K liegen auf einem Kreis k. Wie gross ist der Radius r dieses Kreises? (1.5 P.)

(f) Die Fläche des Schnittkreises k ist die Grundfläche eines geraden Kreiskegels, dessen Spitze S auf der Ebene E_2 liegt. Bestimmen Sie die Koordinaten der Spitze S und das Kegelvolumen. (2.5 P.)

(g) Die Fläche des Schnittkreises k ist auch die Grundfläche eines geraden Kreiskegels mit Spitze S_1, dessen Mantellinien Tangenten an die Kugel K sind. Bestimmen Sie die Höhe dieses Kegels. (1 P.)

Aufgabe 3 - Analysis (12 Punkte)

Gegeben sei eine Funktionenschar

$$h_t(x) = \frac{3te^x}{e^{2x}+t} \qquad \text{mit} \quad t > 0.$$

Die Graphen dieser Schar seien mit G_t bezeichnet.

(a) Lösen Sie die Aufgaben (i) bis (iv) **ohne** den **Taschenrechner** zu benutzen.

- (i) Untersuchen Sie das Verhalten von h_t für $x \to \pm\infty$. (1.5 P.)
- (ii) Berechnen Sie die Koordinaten der Extremalpunkte aller Graphen G_t.
  Die zweite Ableitung der Funktion muss nicht berücksichtigt werden. (3.5 P.)
- (iii) Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve der Extremalpunkte aller Graphen G_t. (1 P.)
- (iv) Zeigen Sie, dass jeder Graph achsensymmetrisch zur Vertikalen durch den Extremalpunkt ist. (3 P.)

(b) Für die Aufgabe (v) dürfen Sie den **Taschenrechner verwenden**.

- (v) Für welchen Parameter t ist der Abstand des rechten Wendepunktes zum Ursprung minimal? Berechnen Sie diesen Abstand auf drei Nachkommastellen genau. (3 P.)

Aufgabe 4 - Stochastik (12 Punkte)

Ein Lehrer lädt nach drei Jahren seine ehemalige Maturklasse in seine alte Scheune ein, in der er drei Achtpersonentische vorbereitet hat um einen geselligen Abend zu verbringen und alte Erinnerungen aufleben zu lassen. Zur glücklichen Überraschung aller, ist die ganze 22-köpfige Klasse anwesend.

(a) Alle Gäste, inklusive dem Klassenlehrer und seiner Frau, nehmen an den Tischen der Scheune Platz. Auf wie viele Arten können sich die Anwesenden auf die drei Tische verteilen, wenn die Verteilung an den einzelnen Tischen nicht berücksichtigt wird? (1 P.)

(b) Auf dem Tisch von Anna steht ein Korb mit zwölf Omeletten. Der Klassenlehrer erlaubt sich einen Scherz und füllt drei dieser zwölf Omeletten statt mit leckerer Konfitüre mit scharfem Senf. Da alle Personen Appetit auf Omeletten haben, nimmt sich jeder an Annas Achtpersonentisch genau ein Omelette. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat mindestens einer am Tisch ein Omelette mit Senf erwischt? (2 P.)

(c) Der Klassenlehrer lanciert zur sportlichen Auflockerung einen kleinen Salsa-Tanzwettbewerb, wobei er zusammen mit seiner Frau die Rolle des Schiedsgerichts übernimmt. Dazu sollen die elf Schülerinnen der Klasse ihren jeweiligen männlichen Tanzpartner frei wählen können. Wie viele verschiedene, gemischtgeschlechtliche Tanzpaare lassen sich für den Wettbewerb bilden? Inwiefern würde sich die Anzahl der möglichen Tanzpaare verändern, wenn auch gleichgeschlechtliche Paare für den Wettbewerb zugelassen sind? (1.5 P.)

Nach dem Essen wird gespielt. Dazu werden zwei besondere Spielwürfel, die die Form eines Oktaeders[1] aufweisen, einmalig geworfen. Die Spielregeln dieses Würfelspiels lauten wie folgt:

1. Erhält man einen Pasch (ein Pasch ist ein Wurf mehrerer Würfel, bei dem alle Würfel die gleiche Augenzahl zeigen), so bekommt man das Produkt aus den beiden Augenzahlen als Auszahlung in Franken.
2. Wirft man mit einem der beiden Würfel eine 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 aber keinen Pasch, so bekommt man nichts ausbezahlt.
3. Zeigen beide Würfel eine höhere Augenzahl als 6 aber kein Pasch, so erhält man die Summe der beiden Augenzahlen als Auszahlung.

(d) Sei die Zufallsgrösse X die Auszahlung in CHF. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und berechnen Sie den Einsatz in CHF, damit das Spiel fair ist. (3 P.)

(e) Petra spielt das Würfelspiel mehrmals hintereinander, wobei sie pro Spiel jeweils einen Einsatz von 3.60 CHF leistet. Petra bewertet es als Erfolg, wenn Sie mehr ausbezahlt bekommt, als Sie eingesetzt hat. Begründen Sie, dass die Erfolgswahrscheinlichkeit p von Petra $^9/_{64}$ beträgt und bestimmen Sie die Höhe der Wahrscheinlichkeit, dass Petra beim Zehnmaligen Spielen des Würfelspiels mindestens 4 Mal einen Erfolg verbuchen kann. (2 P.)

(f) Wie viele Runden müsste Petra spielen, damit Sie mit mindestens 99% Sicherheit mindestens einmal einen Erfolg gehabt hat? (1 P.)

(g) Petra spielt das Spiel insgesamt 36 Mal. Wie viele Erfolge kann Sie für diese 36 Spiele im Mittel erwarten? Bestimmen Sie anschliessend die Grösse der (Standard-)Abweichung von diesem zu erwartenden Mittelwert und interpretieren Sie die konkrete Bedeutung des erhaltenen Werts der Standardabweichung für Petras Spiel. (1.5 P.)

[1] Ein Oktaeder ist ein regelmässiges Polyeder mit acht kongruenten gleichseitigen Dreiecken als Flächen.

Aufgabe 5 - Wachstumsprozesse (12 Punkte)

In der Ausgangspopulation eines Ameisenstaates befinden sich 60000 Ameisen. In jeder Woche sterben jeweils 8 Prozent des Bestandes. Im selben Ameisenstaat werden aber jede Woche 2000 junge Ameisen geboren. Im Modell kann davon ausgegangen werden, dass die Neugeborenen während der Woche, in der sie geboren werden, nicht sterben.

(a) Betrachten Sie zuerst den Ameisenstaat **ohne** Berücksichtigung der Neugeborenen:

(i) Wieviele Ameisen wären dann nach 15 Wochen noch vorhanden? (1 P.)

(ii) Nach welcher Zeit wäre nur noch die Hälfte der Ameisen vorhanden?
Bestimmen Sie diese Zeit T sowohl von Hand in der Logarithmusdarstellung als auch mit dem Taschenrechner. (1.5 P.)

(b) Betrachten Sie nun den Ameisenstaat **mit** Berücksichtigung der Neugeborenen:

(iii) Wie gross ist der Ameisenstaat nach einer Woche? (1 P.)

(iv) Zeigen Sie, dass die Population des Ameisenstaates gemäss dem Modell nach 5 Wochen aus 48068 Ameisen besteht. (1 P.)

(v) Angenommen, die Population würde sich auch in Zukunft unverändert auf diese Weise vermehren. Zeigen Sie, dass sich die Populationgrösse P in der n-ten Woche ergibt zu:

$$P(n) = 60000 \cdot 0.92^n + 2000 \cdot \left(1 + 0.92^1 + 0.92^2 + \ldots + 0.92^{n-1}\right)$$

und bestimmen Sie die Anzahl der Ameisen nach 20 Wochen. (2.5 P.)

(vi) Die blaue Elise behauptet, dass die Population viel einfacher durch

$$Q(n) = 35000 \cdot 0.92^n + 28000$$

beschrieben werden kann. Prüfen Sie, ob bzw. für welche n Elises Behauptung wahr ist! (2 P.)

(vii) Einige Umweltschützer befürchten, dass bei gleichbleibender Entwicklung der Population irgendwann der Bestand ausgerottet ist. Andere behaupten, dass die Ameisenpopulation zwar sinken, aber niemals den Wert von 30000 Tieren unterschreiten wird. Begründen Sie rechnerisch, wie realistisch Sie diese beiden Szenarien einschätzen! (1 P.)

(viii) Wie viele Nachkommen müssten die Königinnen pro Woche gebären, wenn die Ameisenpopulation nie unter 35000 Ameisen sinken soll? (1 P.)

(ix) Geben Sie einen realistischen bzw. sinnvollen Definitionsbereich für n bei der Funktion $P(n)$ dieser Modellrechnung an und begründen Sie diesen. (1 P.)