gymnasium liestal

Maturité 2013 – Examen écrit de mathématiques

Classes : 4(A)Z, 4GL, 4IS, 4ISW, 4LW, 4MW, 4S, 4W, 5KSW (BlT, HrP, KrD, LaG, PeM, PrG, RaM, ZuA)

Durée de l'examen :	4 h
Ressources autorisées :	Calculatrice (CAS) et son manuel Formulaire (*Fundamentum*) Dictionnaire français-allemand
Remarques :	Commencer chaque exercice sur une nouvelle feuille. Le travail avec la calculatrice doit être justifié. Le nombre maximal de points est indiqué pour chaque exercice.

Géométrie vectorielle (12 points)

1. Voyage sur un rayon de lumière

   L'idée de voyager sur une onde lumineuse vient du célèbre Albert Einstein. Comment se représenter le monde de ce point de vue est une question que se posait déjà le jeune lycéen de 16 ans. Ce jeu d'esprit, en apparence anodin, s'avéra plus tard être le germe d'une idée révolutionnaire : la théorie de la relativité.

   Notre voyage commence par une source de lumière au point $A\,(\,5\,|\,3\,|\,7\,)$. Nous nous déplaçons sur le rayon lumineux défini par la demi-droite d : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, où $t \geq 0$.

   (a) *Les calculs de cette question doivent être entièrement faits à la main.*
   En quel point B notre trajectoire (*Flugbahn*) coupe-t-elle le plan yz ? (1 P.)

   (b) *Les calculs de cette question doivent être entièrement faits à la main.*
   Notre itinéraire (*Reiseroute*) passe-t-il par le point $C\,(\,-1\,|\,15\,|\,1\,)$? (1 P.)

   (c) Existe-t-il un point D en lequel notre trajectoire coupe un autre rayon lumineux h passant par le point $E\,(\,19\,|\,10\,|\,28\,)$ et de direction $\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$?
   S'il existe, calculer les coordonnées de ce point D. (2 P.)

   (d) On considère maintenant le point $G\,(\,6\,|\,7\,|\,5\,)$ qui n'est pas sur notre trajectoire ($G \notin d$).

      i. Quel point H de la <u>demi</u>-droite d est distant de 5 unités de longueur du point G ? (2,5 P.)

      ii. Pour quel point I de d la distance au point G est-elle la plus courte ? (2 P.)

   (e) L'arrivée : l'objectif de notre voyage est d'atteindre le plan $\mathcal{P} : 4x+y+3z-52=0$.

      i. En quel point J arrivons-nous sur le plan $\mathcal{P}$? (1 P.)

      ii. Avec quel angle α recontrons-nous le plan $\mathcal{P}$? (1 P.)

   (f) Justifier précisément pourquoi notre itinéraire le long de la demi-droite d n'est pas le plus court chemin du point A au plan $\mathcal{P}$. Calculer alors la distance la plus courte pour réaliser ce déplacement. (1,5 P.)

Combinatoire et probabilité (12 points)

2. Une urne contient 5 boules rouges identiques, 3 boules blanches identiques et 2 boules bleues identiques.

   (a) De combien de façons différentes peut-on disposer (*anordnen*) les 10 boules ? (1 P.)

   (b) On tire 2 boules l'une après l'autre sans remise. Quelle est la probabilité que les deux boules soient de couleurs différentes ? (1,5 P.)

   (c) Les boules sont maintenant tirées avec remise.

      i. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune boule bleue si l'on tire 10 boules ? (1 P.)

      ii. On tire 4 boules. Quelle est la probabilité que l'on obtienne exactement 2 boules bleues ? (1,5 P.)

      iii. Combien de boules au minimum faut-il tirer pour que la probabilité d'avoir au moins une boule bleue soit supérieure à 99 % ? (1,5 P.)

   (d) On tire ensuite 3 boules en une seule fois. Quelle est la probabilité d'avoir exactement 2 boules de la même couleur ? (1,5 P.)

   (e) Dans un jeu deux joueurs A et B tirent chacun leur tour une boule avec remise. A commence. Le premier qui tire une boule blanche gagne. Le jeu se termine au plus tard si 4 boules ont été tirées. Si la 4^{e} boule n'est pas blanche, il n'y a alors pas de gagnant (match nul). Quelles sont les chances de gagner pour A et B ? (2 P.)

   (f) Pour finir, les deux boules bleues de l'urne sont remplacées par deux boules rouges. Combien de boules blanches faut-il alors ajouter dans l'urne pour que, si l'on tire deux boules sans remise, la probabilité d'avoir deux couleurs différentes soit égale à $\frac{8}{15}$ exactement ? (2 P.)

Analyse 1 (12 points)

3. On considère la famille de fonctions f_k définie par l'expression :
$f_k(x) = x^3 - 2 \cdot k \cdot x^2 + k^2 \cdot x$, avec le paramètre réel $k \geq 0$.

   (a) Calculer les zéros de f_k. (0,5 P.)

   (b) *Les calculs de cette question doivent être entièrement faits à la main.*
   Calculer les abscisses x des points d'inflexion des graphes de f_k. (1,5 P.)

   (c) Déterminer les coordonnées des points extremums locaux des graphes de f_k et préciser s'il s'agit de points minimums ou de points maximums. (2,5 P.)

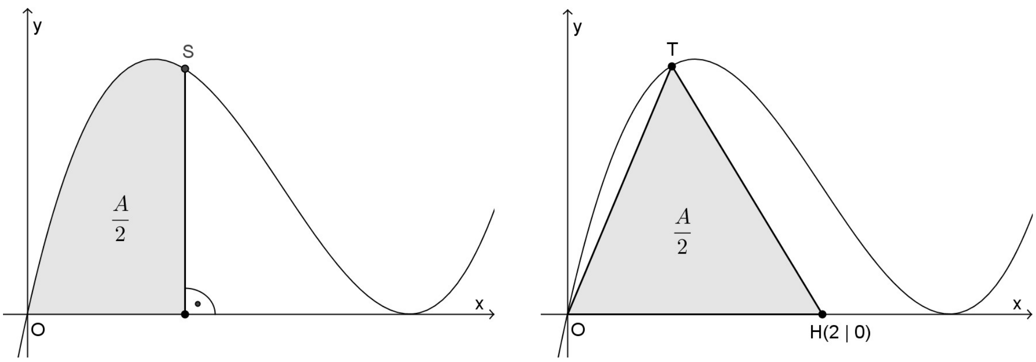
   On travaille maintenant avec le paramètre $k = 3$.
   Le graphe de la fonction f_3 est noté G_3.

   (d) Vérifier que G_3 coupe la droite d'équation $y = x$ en $x = 2$. Calculer l'angle α (en degrés) formé par la droite et G_3 en ce point. (2 P.)

   G_3 définit avec l'axe x dans le premier quadrant une surface fermée d'aire A.

   (e) Montrer que $A = \frac{27}{4}$ unités d'aire. (1 P.)

   (f) Calculer les abscisses x possibles des points S et T (voir schémas ci-dessous). (2 P.)



   (g) Une fourmi (*eine Ameise*) se trouve au point $C(1|0)$ et se demande quelle est la plus courte distance permettant de rejoindre G_3.
   Calculer les coordonnées du point $P \in G_3$ pour lequel la distance entre C et P est minimale. Calculer alors cette distance minimale. (2,5 P.)

Analyse 2 (12 points)

4. Soit $f_t(x) = 2x \cdot e^{\left(\frac{t \cdot x}{2} - t\right)}$ l'équation d'une famille de fonctions avec le paramètre réel t.

   (a) *Les calculs de cette question doivent être entièrement faits à la main.*
   Montrer que le point $(2\,|\,4)$ appartient à tous les graphes de la famille f_t, quel que soit le nombre t. (1 P.)

   (b) Calculer les coordonnées des points maximums. Pour quelles valeurs du paramètre t existe-t-il des maximums ? (2,5 P.)

   (c) Les courbes de f_{-2} et f_{-1} délimitent dans le 1er quadrant une surface fermée S. Calculer l'aire de cette surface S. (1,5 P.)

   (d) *Les calculs de cette question doivent être entièrement faits à la main.*
   Montrer que $F_2(x) = (2x - 2) \cdot e^{x-2}$ est l'équation d'une primitive de la fonction f_2.
   Calculer l'aire comprise entre la courbe de f_2 et l'axe x pour $x \in [\,0\,;\,2\,]$. (2 P.)

   (e) Une droite de pente 3 est tangente à un graphe d'une fonction de f_t en $x = 2$. Calculer le paramètre t de cette fonction. (1,5 P.)

   (f) Si $t < 0$ (*ne pas oublier cette condition lors du calcul avec la calculatrice*), la courbe de f_t délimite avec l'axe x dans le premier quadrant une surface qui s'étend à l'infini. Montrer que l'aire de cette surface est finie (que sa valeur n'est pas infinie). Pour quelle valeur de t cette surface est-elle minimale ? Calculer alors cette aire minimale. (2 P.)

   (g) La révolution (rotation) autour de l'axe x du domaine délimité par le graphe de f_{-2} et l'axe x, pour $x \in [\,0\,;\,p\,]$, engendre un solide. Pour quelle valeur de p le volume du solide est-il égal à 170 unités de volume ? (1,5 P.)

Exercices courts (12 points)

5. Cette partie est composée de deux exercices indépendants.

(a) Dans un repère xyz de l'espace, on considère le point $A(1|3|2)$ et la droite d passant par $B(-3|-1|3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

i. Soit $C(x|y|-29)$ un point de d. Calculer x et y . (1 P.)

ii. *Les calculs de cette question doivent être entièrement faits à la main.* Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ contenant le point A et la droite d. (1,5 P.)
Indication : (Si aucune équation n'a été trouvée, prendre pour la suite $\mathcal{P}\,:\,-4x + 2.4y - 6.4z + 9.6 = 0$.*)*

iii. Soit H le projeté orthogonal du point $S(43|-13|31)$ sur le plan $\mathcal{P}$. Calculer les coordonnées du point H. (2 P.)

iv. Calculer le volume du tétraèdre $ABCS$. (1,5 P.)

(b) Au sein d'une population, les individus sont répartis en quatre groupes sanguins : A, B, AB et O. Pour chaque groupe, il y a deux rhésus (+ ou −). Une enquête a relevé les pourcentages suivants :

Groupe	A	B	AB	O
rhésus +	32.8	8.1	4.15	$5x$
rhésus −	x	1.9	0.85	9

i. Calculer la valeur de x. (0,5 P.)

Une personne est choisie au hasard dans la population.

ii. Quelle est la probabilité qu'elle soit du groupe B ou qu'elle ait un rhésus négatif? (1 P.)

iii. Sachant que son rhésus est positif, calculer la probabilité qu'elle soit du groupe O. (1,5 P.)

50 personnes de la population s'inscrivent pour donner leur sang.

iv. Quelle est la probabilité d'avoir parmi elles au moins une personne du type sanguin (très rare) AB rhésus négatif ? (1,5 P.)

8 personnes (deux de chaque groupe sanguin) sont sélectionnées pour passer un test médical. Il faut que les personnes d'un même groupe (A, B, AB, O) restent ensemble et passent consécutivement le test (l'une après l'autre).

v. Dans ces conditions, de combien de façons différentes (d'ordres différents) peut-on faire passer le test à ces 8 personnes ? (1,5 P.)