gymnasiumliestal

Maturitätsprüfungen 2013 – Mathematik schriftlich

Klassen: 4(A)Z, 4GL, 4IS, 4ISW, 4LW, 4MW, 4S, 4W, 5KSW (BlT, HrP, KrD, LaG, PeM, PrG, RaM, ZuA)

Prüfungsdauer:	4h
Erlaubte Hilfsmittel:	CAS-Taschenrechner mit Anleitung und gegebenenfalls nicht-Grafik/CAS-fähiger Taschenrechner Formelsammlung.
Bemerkungen:	Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt. Die Arbeit mit dem Taschenrechner muss dokumentiert sein. Bei jeder Aufgabe steht die maximale Punktzahl.

Vektorrechnung (12 Punkte)

1. Reise auf einem Lichtstrahl

Die Idee vom Ritt auf einer Lichtwelle stammt von keinem Geringeren als von Albert Einstein. Wie sich einem dabei die Welt präsentieren würde, war eine der Fragen, die den damals 16-jährigen Gymnasiasten umtrieb. Es scheint wie ein harmloses Gedankenspiel und doch war es der Keim einer epochalen Idee: Der Relativitätstheorie.

Unsere Reise beginnt bei einer Lichtquelle im Punkt $A(5|3|7)$. Wir bewegen uns auf der Halbgeraden $g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, wobei $t \geq 0$ gilt.

(a) *Diese Teilaufgabe ist vollständig von Hand zu lösen.*
In welchem Punkt B durchstösst unsere Flugbahn die yz-Koordinatenebene? (1 P.)

(b) *Diese Teilaufgabe ist vollständig von Hand zu lösen.*
Wird unsere Reiseroute durch den Punkt $C(-1|15|1)$ führen? (1 P.)

(c) Überprüfen Sie, ob und gegebenenfalls in welchem Punkt D wir die Flugbahn h eines anderen Lichtstrahls kreuzen, welcher vom Punkt $E(19|10|28)$ ausgeht und sich in Richtung $\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ bewegt. (2 P.)

(d) Betrachten wir nun den Punkt $G(6|7|5) \notin g$, welcher sich abseits unserer Reiseroute befindet.

i. Bestimmen Sie denjenigen Punkt H auf der <u>Halb</u>geraden g, welcher die Entfernung 5 vom Punkt G besitzt. (2.5 P.)

ii. Für welchen Geradenpunkt $I \in g$ ist die Entfernung zum Punkt G am geringsten? (2 P.)

(e) Die Ankunft: Ziel unserer Reise ist die Ebene $\epsilon : 4x + y + 3z - 52 = 0$.

i. In welchem Punkt J erreichen wir die Ebene ϵ? (1 P.)

ii. Unter welchem Winkel α treffen wir auf die Ebene ϵ auf? (1 P.)

(f) Begründen Sie stichhaltig, weshalb unsere Flugroute entlang der Halbgeraden g nicht der kürzeste Reiseweg von A nach ϵ ist und berechnen Sie die Länge der kürzesten Flugroute. (1.5 P.)

Wahrscheinlichkeitsrechnung (12 Punkte)

2. In einer Urne befinden sich 5 identische rote, 3 identische weisse und 2 identische blaue Kugeln.

   (a) Auf wie viele verschiedene Arten lassen sich die Kugeln anordnen? (1 P.)

   (b) Es werden nacheinander 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden Kugeln verschiedene Farben haben. (1.5 P.)

   (c) Es werden Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
      i. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, bei 10 Ziehungen keine blaue Kugel zu ziehen? (1 P.)
      ii. Wie wahrscheinlich ist es, bei 4 Ziehungen genau 2 blaue Kugeln zu erhalten? (1.5 P.)
      iii. Wie gross ist die Anzahl der Ziehungen mindestens zu wählen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens einmal eine blaue Kugel gezogen wird? (1.5 P.)

   (d) Es werden 3 Kugeln mit einem Griff gezogen.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben genau 2 davon die gleiche Farbe? (1.5 P.)

   (e) Im folgenden Spiel ziehen die Spielerinnen A und B jeweils mit Zurücklegen abwechselnd je eine Kugel aus der Urne. A beginnt. Wer zuerst eine weisse Kugel zieht, hat gewonnen. Das Spiel wird spätestens nach 4 gezogenen Kugeln beendet. Ist auch die 4. Kugel nicht weiss, endet das Spiel unentschieden.
   Wie gross sind die Gewinnchancen von A und B? (2 P.)

   (f) In obiger Urne werden die beiden blauen Kugeln durch rote ersetzt. Wie viele weisse Kugeln müssen zusätzlich in die Urne gelegt werden, damit bei zweimaligem Ziehen ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeit für zwei verschiedene Farben genau $^8/_{15}$ beträgt? (2 P.)

Analysis 1 (12 Punkte)

3. Wir betrachten die Funktionenschar f_k, welche wie folgt definiert ist:
$f_k(x) = x^3 - 2 \cdot k \cdot x^2 + k^2 x$ mit dem reellen Parameter $k \geq 0$.

(a) Berechnen Sie die Nullstellen von f_k. (0.5 P.)

(b) *Diese Aufgabe muss vollständig von Hand gelöst werden.*
Berechnen Sie die x-Koordinaten der Wendepunkte der Graphen von f_k. (1.5 P.)

(c) Bestimmen Sie die Koordinaten der lokalen Extremalpunkte der Kurvenschar von f_k und bestimmen Sie jeweils, ob es sich um einen Hoch- oder Tiefpunkt handelt. (2.5 P.)

Wir arbeiten von nun an mit dem Parameter $k = 3$.

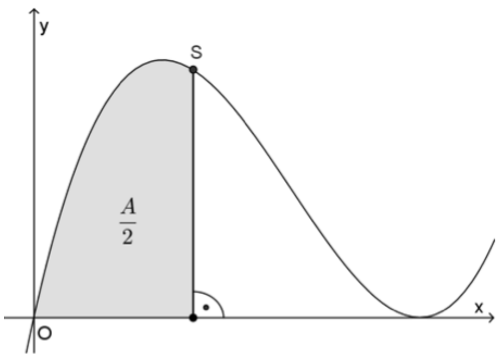
Der Graph der Funktion $f_3(x)$ heisst G_3.

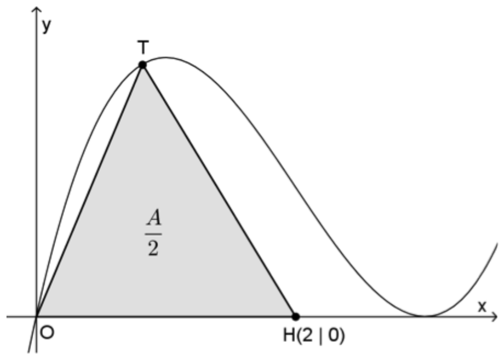
(d) Zeigen Sie, dass G_3 die Gerade mit der Gleichung $y = x$ an der Stelle $x = 2$ schneidet. Berechnen Sie den Schnittwinkel α (in Grad) zwischen der Geraden und G_3 an dieser Stelle. (2 P.)

G_3 begrenzt im ersten Quadranten zusammen mit der x-Achse eine Fläche mit endlichem Flächeninhalt A.

(e) Zeigen Sie, dass $A = \frac{27}{4}$ Flächeneinheiten beträgt. (1 P.)

(f) Berechnen Sie die möglichen x-Koordinaten der Punkte S und T (vergleiche Abbildung). (2 P.)





(g) Eine Ameise steht beim Punkt $C(1|0)$ und fragt sich, welches wohl der kürzeste Weg sei, um zum Graphen von f_3 zu gelangen.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $P \in G_3$, für den die Streckenlänge von C zu P minimal ist. Wie lange ist diese minimale Strecke? (2.5 P.)

Analysis 2 (12 Punkte)

4. Sei $f_t(x) = 2x \cdot e^{\left(\frac{t \cdot x}{2} - t\right)}$ die Gleichung einer Funktionenschar mit dem reellen Parameter t.

   (a) Zeigen Sie von Hand, dass der Punkt $(2\,|\,4)$ unabhängig von t auf den Graphen der Funktionenschar $f_t(x)$ liegt. (1 P.)

   (b) Berechnen Sie die Koordinaten der Hochpunkte. Für welche Werte des Parameters t existieren Hochpunkte? (2.5 P.)

   (c) Die Graphen der Funktionen $f_{-2}(x)$ und $f_{-1}(x)$ umschliessen im 1. Quadranten vollständig ein Flächenstück S. Berechnen Sie den Flächeninhalt von S. (1.5 P.)

   (d) *Diese Aufgabe muss vollständig von Hand gelöst werden.*
   Zeigen Sie, dass $F_2(x) = (2x - 2) \cdot e^{x-2}$ eine Stammfunktion von $f_2(x)$ ist.
   Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von $f_2(x)$ und der x-Achse über dem Intervall $I_1 = [0; 2]$. (2 P.)

   (e) Eine Gerade mit der Steigung 3 sei Tangente an den Graphen einer Funktion der Schar $f_t(x)$ an der Stelle $x = 2$. Bestimmen Sie den Parameter t dieser Funktion. (1.5 P.)

   (f) Für $t < 0$ (Vergessen Sie bei Verwendung des Taschenrechners nicht diese Bedingung) begrenzen der Graph von $f_t(x)$ und die x-Achse im ersten Quadranten eine sich ins Unendliche erstreckende Fläche. Zeigen Sie, dass diese Fläche einen endlichen Flächeninhalt hat. Für welchen Wert von t ist dieser Flächeninhalt minimal? Berechnen Sie diesen minimalen Flächeninhalt. (2 P.)

   (g) Der Graph der Funktion $f_{-2}(x)$ rotiert um die x-Achse und erzeugt über dem Intervall $I_2 = [\,0\,;\,p\,]$ einen Körper. Für welchen Wert von p hat der Körper ein Volumen von 170 Volumeneinheiten? (1.5 P.)

Kurzaufgaben (12 Punkte)

5. Diese Aufgabe besteht aus zwei voneinander unabhängigen Teilaufgaben.

   (a) In einer Baustelle ist die Geschwindigkeit auf 60 km/h begrenzt. Es soll überprüft werden, ob durch diese Geschwindigkeitsbegrenzung die Entstehung von Staus begünstigt wird. Dazu soll ermittelt werden, wie viele Fahrzeuge pro Minute in Abhängigkeit der Geschwindigkeit in den Baustellenbereich einfahren können.

   Für den theoretischen Sicherheitsabstand zwischen zwei mit der Geschwindigkeit v (in km/h) fahrenden Fahrzeuge gelten folgende Werte:

v in km/h	50	75	100
Sicherheitsabstand s in m	18.6	30.5	44.3

   i. Berechnen Sie die Gleichung der quadratischen Funktion $s(v)$, die den Sicherheitsabstand s in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v angibt. (1.5 P.)

   [Wenn Sie diese Teilaufgabe nicht lösen können, verwenden Sie für die restlichen Teilaufgaben $s(v) = 1.52 \cdot 10^{-3}v^2 + 0.286v + 0.5$.]

   ii. Bestimmen Sie den Sicherheitsabstand für eine Geschwindigkeit von 60 km/h sowie die Geschwindigkeit, für die der Sicherheitsabstand 25 m beträgt. (1.5 P.)

   Die Zeit, die vergeht, bis das nächste Auto in die Baustelle einfahren kann, wird als Taktzeit bezeichnet. Für die Taktzeit gilt:

$$t(v) = \frac{3.6 \cdot (4.5 + s(v))}{v}, \quad t \text{ in } s, v \text{ in } km/h.$$

   iii. Berechnen Sie diejenige Geschwindigkeit, für die die Taktzeit minimal ist. (2 P.)

   iv. Begründen Sie, dass entsprechend dieser Modellannahmen die Geschwindigkeitsbegrenzung nicht die Ursache für eventuell auftretende Staus sein kann. (1 P.)

(b) Das *Mycobacterium Tuberculosis* gilt als wichtigster Erreger der Tuberkulose beim Menschen. Nach einer Anlaufphase, in welcher die Mikroorganismen ihren Stoffwechsel anpassen, geht eine Bakterienkultur in ein exponentielles Wachstum über. Folglich lässt sich die Anzahl N der Bakterien zu einem Zeitpunkt t mithilfe einer Exponentialfunktion

$$N(t) = N_0 \cdot k^t$$

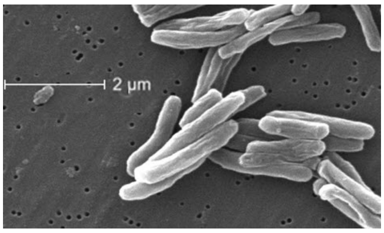
beschreiben, wobei die Zeit t in *Stunden* seit Beginn des exponentiellen Wachstums gemessen wird. Der Wachstumsfaktor soll als konstant $k = 1.035$ angenommen werden.

i. Wie gross ist der stündliche prozentuale Zuwachs dieser Bakterienkultur? (0.5 P.)

ii. Als *Generationszeit* bezeichnet man diejenige Zeitdauer, in welcher sich die Zahl der Individuen einer Population von Lebewesen verdoppelt. Berechnen Sie die Generationszeit für das Mycobacterium Tuberculosis. (1 P.)

iii. Berechnen Sie die Anzahl in einer Probe ursprünglich vorhandener Bakterien, wenn nach dem ersten Tag 39 400 Mikroorganismen gezählt werden. (1 P.)

iv. Mithilfe der nebenstehenden mikroskopischen Aufnahme können wir abschätzen, dass ein einzelnes Bakterium eine Fläche von ca. $1\,\mu m^2$ einnimmt. Wie lange dauert es, bis aus 100 000 anfänglich vorhandenen Mikroorganismen eine kreisförmige Kultur von $1\,mm$ Durchmesser entstanden ist?



Nehmen Sie dabei vereinfachend an, dass sich die Bakterien einerseits nicht übereinander anordnen und vernächlässigen Sie andererseits allfällige Zwischenräume. (2 P.)

v. Das Wachstum der oben beschriebenen Bakterienkultur wird durch die angegebene Funktion $N(t) = N_0 \cdot k^t$ beschrieben, sofern wir die Zeit t in *Stunden* messen. Modifizieren Sie diese Funktion so, dass wir die Zeit t in *Minuten* einsetzen können. Geben Sie dabei gerundete Werte mit einer Genauigkeit von 5 Nachkommastellen an. (1.5 P.)

Stochastik (12 Punkte)

5. Ein Lehrer lädt nach drei Jahren seine ehemalige Maturandenklasse in seine alte Scheune ein, um einen geselligen Abend zu verbringen, alte Erinnerungen aufleben zu lassen und sich über das aktuelle Befinden der SchülerInnen zu erkundigen. Zur glücklichen Überraschung aller, ist die ganze 22-köpfige Klasse anwesend.

   (a) Alle Gäste, inklusive dem Klassenlehrer und seiner Frau, nehmen an drei Achtpersonentischen Platz. Auf wie viele Arten können die Anwesenden sich auf die drei Tische verteilen, wenn die Verteilung an den einzelnen Tischen nicht berücksichtigt wird? (2 P.)

   (b) Der Klassenlehrer lanciert zur sportlichen Auflockerung einen kleinen Salsa-Tanzwettbewerb, wobei er zusammen mit seiner Frau die Rolle des Schiedsgerichts übernimmt. Dazu sollen die elf Schülerinnen der Klasse ihren jeweiligen männlichen Tanzpartner frei wählen können. Wie viele verschiedene, gemischtgeschlechtliche Tanzpaare lassen sich für den Wettbewerb bilden? Inwiefern würde sich die Anzahl der möglichen Tanzpaare verändern, wenn auch gleichgeschlechtliche Paare für den Wettbewerb zugelassen sind? (2 P.)

   Nach dem Essen wird gespielt. Dazu werden zwei Spielwürfel, die die Form eines Oktaeders (ein Oktaeder ist ein regelmässiges Polyeder mit acht kongruenten gleichseitigen Dreiecken als Flächen; vgl. Formelsammlung) aufweisen, einmalig geworfen. Die Spielregeln des Würfelspiels lauten wie folgt:

   1. Erhält man einen Pasch (ein Pasch ist ein Wurf mehrerer Würfel, bei dem alle Würfel die gleiche Augenzahl zeigen), so bekommt man das Produkt aus den beiden Augenzahlen als Auszahlung in Franken.
   2. Wirft man mit einem der beiden Würfel eine 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 aber keinen Pasch, so bekommt man nichts ausbezahlt.
   3. Zeigen beide Würfel eine höhere Augenzahl als 6 aber kein Pasch, so erhält man die Summe der beiden Augenzahlen als Auszahlung.

   (c) Sei X die Auszahlung in CHF. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgrösse X und begründen Sie, ob man einen Einsatz in Franken (Rappen) zahlen könnte, der das Spiel zu einem fairen Glücksspiel macht. (4 P.)

   (d) Maria spielt das Würfelspiel mehrmals hintereinander, wobei sie pro Spiel jeweils einen Einsatz von 3.60 CHF leistet. Maria bewertet es als Erfolg, wenn Sie mehr ausbezahlt bekommt, als Sie eingesetzt hat. Begründen Sie, dass die Erfolgswahrscheinlichkeit von Maria $\dfrac{9}{64}$ beträgt und bestimmen Sie die Höhe der Wahrscheinlichkeit, dass Maria beim zehnmaligen Spielen des Würfelspiels genau 4 Mal einen Erfolg verbuchen kann. (2 P.)

   (e) Maria spielt das Spiel insgesamt 36 Mal. Wie viele Erfolge kann Sie für diese 36 Spiele im Mittel erwarten? Bestimmen Sie anschliessend die Grösse der Standardabweichung σ_X von diesem zu erwartenden Mittelwert und interpretieren Sie die konkrete Bedeutung des erhaltenen Werts der Standardabweichung für Marias Spiel! (2 P.)

Wirtschaftsmathematik (12 Punkte)

5. Als Wirtschaftsberater arbeitet Peter für einen Betrieb. Leider kennt die Firma bisher nur wenige Zusammenhänge zwischen den Gesamtkosten des Produkts mit Berücksichtigung der Steuern y_{k_r} und der Anzahl der produzierten Mengeneinheiten x:

x in Mengeneinheiten	y_{k_r} in Geldeinheiten
2	5.92
4	6.96
6	7.04
9	9.56

Um auch für andere Mengeneinheiten die Gesamtkosten inklusive Steuern abbilden zu können, rekonstruiert Peter den funktionalen Zusammenhang $y_{k_r}(x)$, indem er für diese Funktion annimmt, dass es sich um ein Polynom 3. Grades handelt.

(a) Bestimmen Sie die geeignete Polynomfunktion dritten Grades $y_{k_r}(x)$, die den Zusammenhang zwischen den Gesamtkosten unter Berücksichtigung Steuern und der produzierten Menge x für diese Firma gemäss obiger Tabelle wiedergibt. (1 P.)

(b) *Hinweis: Falls Sie die vorige Teilaufgabe nicht lösen konnten, können Sie von der Ersatzlösung* $y_{k_r}(x) = 0.04x^3 - 0.6x^2 + 3.5x + 2 - \frac{1}{2}x$ *Gebrauch machen.*
Wie gross sind die Fixkosten y_{k_f} der Firma und wie hoch sind die variablen Kosten y_{k_v}, wenn die feste Steuerrate pro Mengeneinheit gerade $r = 0.25\frac{GE}{ME}$ beträgt? (1 P.)

(c) Wie gross sind die Kosten einer einzelnen Mengeneinheit mit Berücksichtigung der Steuern, wenn der Betrieb insgesamt 2, 3, 7 oder 9 Mengeneinheiten produziert?! (1 P.)

(d) Zeichnen Sie in einem zugehörigen grossen und vollständig beschrifteten Diagramm mit sinnvoller Skalierung die Kurve der durchschnittlichen Gesamtkosten inklusive Steuern $y_{k_{r_D}}(x)$ bei der Produktion von x Mengeneinheiten ein, wobei die x-Achse von 0 bis 9 Mengeneinheiten reichen soll. (2 P.)

(e) Die Nachfragekurve für dieses hergestellte Produkt schätzt Peter durch eine Marktanalyse mit $y_N(x) = -0.16x + 2.8$ ab. Tragen Sie in Ihrem Diagramm aus der vorigen Teilaufgabe die Nachfragekurve möglichst genau ein. (1 P.)

(f) Markieren Sie in Ihrem Diagramm diejenige Menge x_m, bei der der Betrieb den maximalen Gewinn erzielt und bestimmen Sie durch Ablesen den (ungefähren) Wert von x_m. (1 P.)

(g) Lesen Sie aus Ihrem Diagramm ab, wie gross der maximale Gesamtgewinn des Betriebes ist. (1 P.)

(h) *Beachten Sie beim Skizzieren: die Steuerrate beträgt* $r = 0.25\frac{GE}{ME}$.
Skizzieren Sie in Ihrem Diagramm **ohne zu rechnen** den ungefähren Verlauf der zugehörigen Grenzerlöskurve sowie einer geeigneten Grenzkostenkurve **mit und ohne** Berücksichtigung der Steuern. (2.5 P.)

(*Fortsetzung auf der nächsten Seite!*)

(i) Maria behauptet: “Auch wenn das Unternehmen den maximal möglichen Gewinn erzielt, ist dieser immer noch weniger, als die Steuern, die an den Staat abgeführt werden müssen.”

Begründen Sie mit Hilfe Ihres Diagramms, ob Maria Recht hat. (1 P.)

(j) Peter analysiert auch die Nachfrageelastizität ϵ_N im Fall des maximalen Gewinns des Unternehmens und erhält den Wert $\epsilon_N(x_m) \approx -1.7$. Begründen Sie (unter der Voraussetzung, dass Peter sich nicht verrechnet hat) in Worten, wie wahrscheinlich Sie es erachten, dass Peters Analysen sich auf den bekannten Automobilhersteller Ferrari beziehen! (0.5 P.)

Kurzaufgaben (12 Punkte)

5. Diese Aufabe besteht aus zwei voneinander unabhängigen Teilaufgaben.

   (a) Produktionsplanung
   Die Funktionsgleichung für die Nachfrage eines Gutes sehe wie folgt aus:

   $$y_N(x) = -\frac{1}{2}x + 5$$

   Die Kosten für die Produktion und den Vertrieb des Gutes setzen sich aus einem fixen Teil von 1 Geldeinheit (GE) und einem variablen Kostenanteil von $\frac{1}{4}$ GE pro Mengeneinheit (ME) zusammen.
   Ausserdem wird vom Staat eine Steuer der Höhe r GE pro ME des Gutes erhoben.

   i. Geben Sie die Funktionsgleichung für den Gesamterlös $y_E(x)$ in Abhängigkeit von der angebotenen Menge an. (1 P.)

   ii. Geben Sie die Funktionsgleichung für den Gesamtgewinn $y_{G_1}(x)$ in Abhängigkeit von der angebotenen Menge und unter Berücksichtigung des gegebenen Steuersatzes r an.
   (Falls Sie den Gesamterlös in der vorherigen Aufgabe nicht finden konnten, benutzen Sie im Weiteren die Erlösfunktion $y_E(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4x$.) (1 P.)

   iii. Bei welcher Menge ist die Nachfrage *fliessend*? (1 P.)

   Die Gewinnfunktion für ein anderes Gut sei $y_{G_2}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + (5-r)\cdot x - 2$, wobei r wieder für die Abgaben pro Mengeneinheit steht.

   iii. Zeigen Sie, dass der maximale Gewinn bei einer Menge $x = 5 - r$ erzielt wird. (2 P.)

   iv. Berechnen Sie für den Fall des zweiten Gutes die Höhe der maximal zu erzielenden Gesamtsteuern. (1 P.)

(b) Das *Mycobacterium Tuberculosis* gilt als wichtigster Erreger der Tuberkulose beim Menschen. Nach einer Anlaufphase, in welcher die Mikroorganismen ihren Stoffwechsel anpassen, geht eine Bakterienkultur in ein exponentielles Wachstum über. Folglich lässt sich die Anzahl N der Bakterien zu einem Zeitpunkt t mithilfe einer Exponentialfunktion

$$N(t) = N_0 \cdot k^t$$

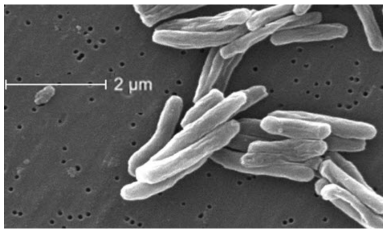
beschreiben, wobei die Zeit t in *Stunden* seit Beginn des exponentiellen Wachstums gemessen wird. Der Wachstumsfaktor soll als konstant $k = 1.035$ angenommen werden.

i. Wie gross ist der stündliche prozentuale Zuwachs dieser Bakterienkultur? (0.5 P.)

ii. Als *Generationszeit* bezeichnet man diejenige Zeitdauer, in welcher sich die Zahl der Individuen einer Population von Lebewesen verdoppelt. Berechnen Sie die Generationszeit für das Mycobacterium Tuberculosis. (1 P.)

iii. Berechnen Sie die Anzahl in einer Probe ursprünglich vorhandener Bakterien, wenn nach dem ersten Tag 39 400 Mikroorganismen gezählt werden. (1 P.)

iv. Mithilfe der nebenstehenden mikroskopischen Aufnahme können wir abschätzen, dass ein einzelnes Bakterium eine Fläche von ca. $1\,\mu m^2$ einnimmt. Wie lange dauert es, bis aus 100 000 anfänglich vorhandenen Mikroorganismen eine kreisförmige Kultur von $1\,mm$ Durchmesser entstanden ist?



Nehmen Sie dabei vereinfachend an, dass sich die Bakterien einerseits nicht übereinander anordnen und vernächlässigen Sie andererseits allfällige Zwischenräume. (2 P.)

v. Das Wachstum der oben beschriebenen Bakterienkultur wird durch die angegebene Funktion $N(t) = N_0 \cdot k^t$ beschrieben, sofern wir die Zeit t in *Stunden* messen. Modifizieren Sie diese Funktion so, dass wir die Zeit t in *Minuten* einsetzen können. Geben Sie dabei gerundete Werte mit einer Genauigkeit von 5 Nachkommastellen an. (1.5 P.)

Kurzaufgaben (12 Punkte)

5. Diese Aufabe besteht aus zwei voneinander unabhängigen Teilaufgaben.

   (a) Ein HIV Schnelltest hat folgende Zuverlässigkeitsmerkmale:

   - 92% der tatsächlich mit HIV Infizierten werden richtig positiv diagnostiziert.
   - Bei 99% der nicht infizierten Personen liefert der Test ein richtig negatives Resultat.

   In der Schweiz leben näherungsweise 8 Millionen Menschen, wovon etwa 20'000 mit HIV infiziert sind. Es wird zufällig eine Person aus der Schweiz ausgewählt.

   i. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem positiven Testresultat tatsächlich eine HIV-Infektion vorliegt? (2 P.)

   ii. Der Test wird zwei Mal durchgeführt, beide Male mit positivem Ergebnis. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt tatsächlich eine HIV-Infektion vor? (2 P.)

   iii. Wie viele Tests mit jeweils positivem Resultat sind insgesamt mindestens nötig, damit die Wahrscheinlichkeit für eine tatsächliche HIV-Infektion mindestens 99.99% beträgt? (2 P.)

(b) Das *Mycobacterium Tuberculosis* gilt als wichtigster Erreger der Tuberkulose beim Menschen. Nach einer Anlaufphase, in welcher die Mikroorganismen ihren Stoffwechsel anpassen, geht eine Bakterienkultur in ein exponentielles Wachstum über. Folglich lässt sich die Anzahl N der Bakterien zu einem Zeitpunkt t mithilfe einer Exponentialfunktion

$$N(t) = N_0 \cdot k^t$$

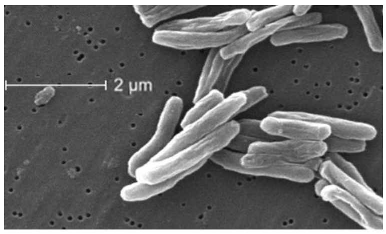
beschreiben, wobei die Zeit t in *Stunden* seit Beginn des exponentiellen Wachstums gemessen wird. Der Wachstumsfaktor soll als konstant $k = 1.035$ angenommen werden.

i. Wie gross ist der stündliche prozentuale Zuwachs dieser Bakterienkultur? (0.5 P.)

ii. Als *Generationszeit* bezeichnet man diejenige Zeitdauer, in welcher sich die Zahl der Individuen einer Population von Lebewesen verdoppelt. Berechnen Sie die Generationszeit für das Mycobacterium Tuberculosis. (1 P.)

iii. Berechnen Sie die Anzahl in einer Probe ursprünglich vorhandener Bakterien, wenn nach dem ersten Tag 39 400 Mikroorganismen gezählt werden. (1 P.)

iv. Mithilfe der nebenstehenden mikroskopischen Aufnahme können wir abschätzen, dass ein einzelnes Bakterium eine Fläche von ca. $1\,\mu m^2$ einnimmt. Wie lange dauert es, bis aus 100 000 anfänglich vorhandenen Mikroorganismen eine kreisförmige Kultur von $1\,mm$ Durchmesser entstanden ist?



Nehmen Sie dabei vereinfachend an, dass sich die Bakterien einerseits nicht übereinander anordnen und vernächlässigen Sie andererseits allfällige Zwischenräume. (2 P.)

v. Das Wachstum der oben beschriebenen Bakterienkultur wird durch die angegebene Funktion $N(t) = N_0 \cdot k^t$ beschrieben, sofern wir die Zeit t in *Stunden* messen. Modifizieren Sie diese Funktion so, dass wir die Zeit t in *Minuten* einsetzen können. Geben Sie dabei gerundete Werte mit einer Genauigkeit von 5 Nachkommastellen an. (1.5 P.)

Exercices courts (12 points)

5. Cette partie est composée de deux exercices indépendants.

   (a) Dans un repère xyz de l'espace, on considère le point $A(1|3|2)$ et la droite d passant par $B(-3|-1|3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

   i. Soit $C(x|y|-29)$ un point de d. Calculer x et y . (1 P.)

   ii. *Les calculs de cette question doivent être entièrement faits à la main.* Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ contenant le point A et la droite d. (1,5 P.)
   Indication : (Si aucune équation n'a été trouvée, prendre pour la suite $\mathcal{P} : -4x + 2.4y - 6.4z + 9.6 = 0$.)

   iii. Soit H le projeté orthogonal du point $S(43|-13|31)$ sur le plan $\mathcal{P}$. Calculer les coordonnées du point H. (2 P.)

   iv. Calculer le volume du tétraèdre $ABCS$. (1,5 P.)

   (b) Au sein d'une population, les individus sont répartis en quatre groupes sanguins : A, B, AB et O. Pour chaque groupe, il y a deux rhésus (+ ou −). Une enquête a relevé les pourcentages suivants :

Groupe	A	B	AB	O
rhésus +	32.8	8.1	4.15	$5x$
rhésus −	x	1.9	0.85	9

   i. Calculer la valeur de x. (0,5 P.)

   Une personne est choisie au hasard dans la population.

   ii. Quelle est la probabilité qu'elle soit du groupe B ou qu'elle ait un rhésus négatif? (1 P.)

   iii. Sachant que son rhésus est positif, calculer la probabilité qu'elle soit du groupe O. (1,5 P.)

   50 personnes de la population s'inscrivent pour donner leur sang.

   iv. Quelle est la probabilité d'avoir parmi elles au moins une personne du type sanguin (très rare) AB rhésus négatif ? (1,5 P.)

   8 personnes (deux de chaque groupe sanguin) sont sélectionnées pour passer un test médical. Il faut que les personnes d'un même groupe (A, B, AB, O) restent ensemble et passent consécutivement le test (l'une après l'autre).

   v. Dans ces conditions, de combien de façons différentes (d'ordres différents) peut-on faire passer le test à ces 8 personnes ? (1,5 P.)

Exercices courts (12 points)

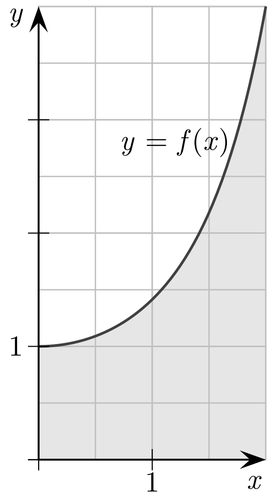
5. Cette partie est composée de 2 exercices indépendants.

   (a) Soit la fonction f définie par $f(x) = 2^{\frac{x^2}{2}}$.

   i. Résoudre à la main $f(x) = 8$. (0,5 P.)

   ii. Il n'est pas possible de trouver une expression pour la fonction primitive F de f. La calculatrice utilise alors une méthode numérique pour calculer $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \cong 3,4792$.

   Notons A l'aire de la surface comprise entre la courbe de f et l'axe x pour $0 \leq x \leq 2$.



   A. Donner un encadrement de l'aire A par la méthode des rectangles : calculer cette aire par défaut et par excès à l'aide de tranches d'épaisseur $\Delta x = 0,25$. (2 P.)

   B. Une meilleure approximation est donnée par la moyenne de ces deux valeurs (il s'agit alors de la méthode des trapèzes). Calculer cette moyenne et donner l'erreur obtenue sur le résultat en pourcentage. (1 P.)

   iii. On s'intéresse maintenant à une expérience aléatoire : une pièce tombe au hasard sur la figure ci-dessus et on repère la position du centre de la pièce. On regarde si son centre tombe sur la surface grise ou sur la surface blanche. On supposera que, pour la pièce, chaque région de la figure est équiprobable.

   A. Quelle est la probabilité p que la pièce tombe sur la surface grise? (0,5 P.)

   B. On effectue 10 fois de suite la même expérience. Combien y a-t-il de situations différentes où la pièce tombe exactement 2 fois sur la surface grise ? (1 P.)

   C. On effectue 20 fois de suite cette expérience. Quelle est la probabilité P que la pièce tombe plus de 3 fois sur la surface grise ? (Si vous n'avez pas trouvé de réponse à la question A, prendre $p = 0,46$.) (1 P.)

   (b) On considère dans un repère xyz les points $A\,(1\,|\,3\,|\,2)$ et $B\,(3\,|\,1\,|\,5)$ ainsi que la droite d de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ et passant par le point $C\,(-3\,|\,-1\,|\,3)$.

   i. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont-ils perpendiculaires ? Justifier. (1 P.)

   ii. Déterminer à la main une équation cartésienne du plan Π contenant le point A et la droite d. (1,5 P.)
   (*Si aucune équation n'a été trouvée, prendre* $\Pi : -4x + 2,4y - 6,4z + 9,6 = 0$ *pour la suite.*)

   iii. Soit H le projeté orthogonal de $S\,(43\,|\,-13\,|\,31)$ sur le plan Π. Calculer les coordonnées du point H. (2 P.)

   iv. Calculer le volume du tétraèdre $ABCS$. (1,5 P.)

Short Problems (12 Points)

5. This problem is comprised of three independent parts. Use a *By Hand* method to answer all parts of this question.

   (a) The Cartesian equations of three different planes are:

   $$\begin{aligned}\Pi_A &: 2x - 2y - z - 3 = 0\\ \Pi_B &: x + y - z + 7 = 0\\ \Pi_C &: k \cdot x - 2y + 2z - 13 = 0\end{aligned}$$

   i. Find the meeting point of these three planes when k equals -3. (2.5 P.)

   ii. A. Show that the following system of equations has no solutions: (1 P.)

   $$\begin{aligned}2x - 2y - z - 3 &= 0\\ x + y - z + 7 &= 0\\ -2x - 2y + 2z - 13 &= 0\end{aligned}$$

   B. Give a geometric interpretation for this result. (0.5 P.)

   (b) The quadratic equation: $y = \frac{9}{2}x - x^2 - 3$ produces a curve which contains the following three named points:

   Point P : Where the x coordinate has the value of 2

   Point Q : Where the curve intersects with the y-axis

   Point R : Where, t_P, the tangent line to the curve at point P intersects with the y-axis.

   i. Calculate the full coordinates of these three points. (2 P.)

   ii. Calculate the area of the bounded region between: (2 P.)

   1: the tangent line, t_P,

   2: the curve of the quadratic equation $y = \frac{9}{2}x - x^2 - 3$ and

   3: the line, l_{QR}, which joins the points Q and R.

(c) A bag contains 12 coloured balls of which 3 are Blue, 4 are Red and 5 are Green.
David, Matthew and Sarah are offered the chance to play a guessing game.
They are told that a box contains Red, Green and Blue balls, but not how many of each!
They may guess either (but not both) of: the colour of the first ball picked out or the colour of the second ball picked out.
If they decide to guess the colour of the second ball picked out, then they will be shown the colour of the first ball picked, but it will not be replaced in the box.

i. Do you agree or disagree with the following calculation?
P(David correctly guesses the colour of the 1st ball)
$$= 1/3 \cdot 3/12 + 1/3 \cdot 4/12 + 1/3 \cdot 5/12 = 1/3$$
Give a clear explanation for your decision. (1 P.)

ii. Matthew's strategy is to watch the colour of the first ball picked and then choose the same colour for the second pick.
Sarah's strategy is to watch the colour of the first ball picked and then to toss a coin to decide between the two colours which did not appear.
Which of the three players has the best strategy? (1.5 P.)

iii. In a gambling game, the same 12 balls are used.
Rules:

1. To play this game, Matthew must pay amount P.

2. If Matthew selects a ball from the bag without looking, he can win the following amounts:
10 Francs if he picks a Green ball, 25 Francs if he picks a Red ball and 50 Francs if he picks a Blue ball.

3. The selected ball is always replaced immediately in the bag.

After playing this game several hundred times, he observes that he is making - on average - a loss of 2 Swiss Francs per game. Estimate the value of P, that Matthew must pay in order to play each game. (1.5 P.)