gymnasium liestal

Maturité 2012 – Examen écrit de mathématiques

Classes : 4(B)M, 4GL, 4I, 4LW, 4LZ, 4S, 4SW, 4Wa, 4Wb **4I bilingue**

Durée de l'examen : 4 h

Ressources autorisées :
- Calculatrice TI-89, TI Voyage 200 ou TI N-spire
- Formulaire (*Fundamentum*)
- Dictionnaire français-allemand (fourni par l'école)

Remarques :
- Chaque exercice est noté sur 12 points.
- Le détail des points est indiqué pour chaque question.
- Chaque exercice sera commencé sur une nouvelle feuille.

Thomas Blott (4GL, 4LW), Pascal Hauser (4SW), Andreas Kilberth (4I monolingue), Dennis Krüger (4Wa), Matthieu Penserini (4S, 4I bilingue), Gérald Prétôt (4(B)M), Raphael Ugolini (4Wb) et Beat Zemp (4LZ) vous souhaitent bonne chance !

---

1. Géométrie vectorielle

Soient les trois points $A(-2\,|\,-1\,|\,1)$, $B(1\,|\,3\,|\,0)$ et $C(5\,|\,-5\,|\,-3)$, ainsi que les droites suivantes :

$$g:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\6\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix} \text{ et } h:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\2\\-6\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}.$$

a) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par les points A, B et C, puis montrer que les droites g et h se coupent au point $S(2\,|\,6\,|\,10)$. (3P)

Indication : si aucun résultat n'a été trouvé pour a), utiliser $\mathcal{P}$: 4x - y + 8z - 1 = 0 .

b) Calculer les coordonnées du point S^*, image du point S par la réflexion de plan $\mathcal{P}$. (3P)

c) Calculer le volume du double tétraèdre $ABCSS^*$ dont la base est le triangle ABC et les sommets sont les points S et S^*. (3P)

d) Calculer l'angle α entre l'arête (die Kante) BS et la base ABC, puis l'angle aigu β formé par la face BCS et la base ABC du tétraèdre $ABCS$. (3P)

2. Calcul différentiel, calcul intégral

Dans toutes les questions de l'exercice, on arrondira les résultats à 4 chiffres après la virgule.

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3}{40} \cdot x^3 - \frac{1}{5} \cdot x^2 + \frac{1}{10} \cdot x$.

a) Calculer les coordonnées complètes des points maximum de f. (2P)

b) Trouver les valeurs de x pour lesquelles la pente de f est égale à 2. (1P)

c) *Pour obtenir la totalité des points de cette question, les calculs devront être faits entièrement à la main*.
Calculer tous les zéros de f. (2P)

d) Pour $x \geq 0$, la fonction f définit avec l'axe x deux surfaces fermées.
Quel est le rapport de proportion entre l'aire de la grande surface et l'aire de la petite surface ? (2P)

Dans la suite du problème, le coefficient $\frac{3}{40}$ de la fonction f est remplacé par un paramètre réel $t > 0$. On considère alors la famille de fonctions définie par : $f_t(x) = t \cdot x^3 - \frac{1}{5} \cdot x^2 + \frac{1}{10} \cdot x$.

e) Déterminer les abscisses de tous les points d'inflexion du graphe de f_t. (2P)

f) Dans cette question, on considère la famille de fonctions $f_t(x)$ et la parabole d'équation $g(x) = 0.1 \cdot (x-10)^2 - 2$.
Déterminer la valeur de t pour laquelle la distance d entre le sommet de la parabole g et le point d'inflexion $W\left(\frac{1}{15 \cdot t} \;\middle|\; \frac{1}{150 \cdot t} - \frac{2}{3375 \cdot t^2}\right)$ de f_t est minimale.
Calculer alors cette distance minimale. (3P)

3. Fonctions rationnelles

Partie 1

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{4x-4}{x^3}$.

a) Où le graphe de f coupe-t-il les axes x et y ? (1P)

b) Sans utiliser la calculatrice, déterminer les pôles ainsi que les équations des asymptotes du graphe de f . La justification pourra être faite par un calcul ou par une phrase précise. (1P)

c) Montrer, sans utiliser la calculatrice, que le graphe de f n'est ni symétrique par rapport à l'origine (Ursprung) du système de coordonnées, ni symétrique par rapport à l'axe y . (1P)

d) *Pour obtenir la totalité des points de cette question, les calculs devront être faits entièrement à la main.*
Calculer les coordonnées de tous les points d'intersection $S(x_S \mid y_S)$ du graphe de f avec le graphe de la fonction $g(x) = x^{-2}$. (1.5P)

e) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = 3$. (1.5P)

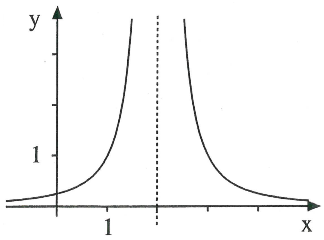
f) Montrer, sans calculatrice, que la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{4}{x}$ est une primitive de la fonction f . (1P)

g) Déterminer la valeur de la constante réelle k pour laquelle la surface fermée, située dans le premier quadrant ($x \geq 0$ et $y \geq 0$), et comprise entre le graphe de f , l'axe x et la droite verticale d'équation $x = k$ a une aire égale à 0.5. (1P)

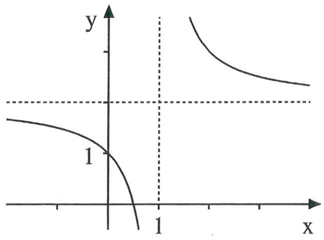
Partie 2

a) Déterminer, pour les deux cas a_1) et a_2) suivants, l'expression d'une fonction f_1 et f_2 qui correspond en principe au graphe donné. (2P)

Indication : sur les figures ci-dessous, les courbes en traits pleins correspondent aux graphes de fonctions. Les droites en pointillées représentent les asymptotes à ces graphes.



a_1)



a_2)

b) Donner (si possible) l'expression d'une fonction rationnelle pour les exercices b_1) et b_2). Dans le cas où aucune fonction vérifiant les propriétés données ne pourra être trouvée, justifier précisément pourquoi.

b_1) Le graphe de la fonction f_3 présente un pôle en $x = -4$, en lequel les limites à gauche et droite sont égales à moins l'infini. Ce graphe admet également une asymptote horizontale en $y = -2$. (1P)

b_2) Le graphe de la fonction f_4 admet un pôle en $x = 5$ et présente une symétrie par rapport à l'axe y . (1P)

4. Probabilités

a) Avant d'embaucher (einstellen) un nouvel employé, une entreprise pratique un test d'intelligence. Lors de ce test, quatre enveloppes (Umschläge) sont disponibles. Deux de ces enveloppes contiennent un questionnaire de mathématiques. A l'intérieur des deux autres enveloppes, on trouve respectivement un questionnaire de compréhension de texte et un questionnaire de culture générale.
Une candidate estime (schätzen) réussir le questionnaire de culture générale avec une probabilité de 80%. Pour les deux autres thèmes, elle évalue sa probabilité de réussite à 70%. On suppose que ses estimations sont réalistes. La candidate doit alors choisir au hasard une des quatre enveloppes et répondre au questionnaire qui s'y trouve.

a_1) Quelle est la probabilité que la candidate choisisse le questionnaire de culture générale et y réponde correctement ? (1P)

a_2) Quelle est la probabilité qu'elle ne réussisse pas le test d'intelligence ? (1.5P)

b) L'entreprise propose un stage de découverte (Schnupperpraktikum). Elle reçoit alors les candidatures de 45 élèves (25 filles et 20 garçons). Seules 10 candidatures seront retenues et les élèves choisis devront ensuite se présenter à un entretien (Besprechung). Le responsable du personnel de l'entreprise décide d'effectuer son choix au hasard.

b_1) De combien de façons différentes peut-on choisir 10 candidats parmi les 45, si on ne tient pas compte du sexe ? (1P)

b_2) De combien de façons différentes peut-on faire ce même choix si on veut avoir, parmi les 10 candidats, exactement 6 filles et 4 garçons ? (1P)

6 filles et 4 garçons sont alors choisis. On invite ces 10 personnes à se présenter à l'entretien.

b_3) Combien y a-t-il de façons différentes de faire passer ces 10 candidats l'un après l'autre, si on ne tient pas compte du sexe ? (1P)

b_4) Combien y a-t-il de façons différentes de faire passer ces 10 candidats, si les personnes du même sexe doivent passer l'une après l'autre ? (2P)

c) L'entreprise cherche aussi de nouveaux collaborateurs (neue Mitarbeiter) pour le service marketing. On sait que, parmi toutes les candidatures reçues pour ces postes, seules 40% répondent aux exigences souhaitées (qualification, expérience professionnelle,...). Ici, 6 candidatures sont choisies au hasard.

c_1) Parmi les 6 candidatures, quelle est la probabilité qu'exactement 4 correspondent aux critères exigés par l'entreprise ? (1.5P)

c_2) Parmi les 6 candidatures, quelle est la probabilité qu'au moins 4 correspondent aux critères exigés par l'entreprise ? (2P)

c_3) Le responsable du personnel affirme : « si nous devions choisir parmi deux candidatures, alors la probabilité qu'au moins un candidat réponde aux critères souhaités est égale à deux fois 40%, c'est-à-dire 80% ».
A-t-il raison ? Justifier précisément votre réponse. (1P)

5. Exercices courts

Cette partie est composée de deux exercices indépendants. On arrondira tous les résultats avec 2 chiffres après la virgule.

5.1. Le graphe de la fonction $f(x) = 2\sqrt{x} + 3$ est défini sur l'intervalle $[0, 9]$ et forme avec l'axe x un domaine $\mathcal{D}$. Un volume de la forme d'un pot de fleurs (couché) est engendré par rotation de $\mathcal{D}$ autour de l'axe x. L'unité sur les axes est le cm.

a) Représenter soigneusement, dans un système de coordonnées, le graphe de la fonction f et le domaine $\mathcal{D}$. Schématiser ensuite le pot de fleurs. (1.5P)

b) Calculer le diamètre (Durchmesser) du pot de fleurs à sa base et en son sommet. (1P)

c) *Pour obtenir la totalité des points de cette question, les calculs devront être faits entièrement à la main*.
Calculer le volume V du pot de fleurs. (2.5P)

d) On souhaite remplir ce pot avec 1 litre de terre. Calculer la hauteur h de terre dans le pot. (2P)

5.2. On considère la droite $d: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x - y - 2z + 5 = 0$ et le point $A(1 \,|\, -1 \,|\, z)$.

a) Le point A appartient au plan $\mathcal{P}$. Calculer z. (1P)

b) Montrer que la droite d est strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$. (2P)

c) Calculer la distance entre d et $\mathcal{P}$. (2P)