gymnasium liestal

Maturitätsprüfungen 2012 – Mathematik schriftlich

Klassen: 4(B)M, 4GL, 4I, 4LW, 4LZ, 4S, 4SW, 4Wa, 4Wb

4(B)M

Prüfungsdauer: 4 h

Erlaubte Hilfsmittel:
- Formelsammlung "Fundamentum" (nur Markierungen erlaubt)
- Taschenrechner und -handbuch
  (TI–89, TI Voyage 200, TI Nspire und auch nicht CAS-fähiger Rechner)

Die Prüfung besteht aus fünf grossen Aufgaben 1-5, wobei jede mit total 12 Punkten gewichtet ist. Jede dieser Aufgaben umfasst mehrere Teilaufgaben, deren Punktzahlen jeweils in Klammern aufgeführt sind.

Beginnen Sie jede Aufgabe 1-5 mit einem neuen Blatt.

Ihre Lösungswege (inkl. Taschenrechnerbefehle) müssen nachvollziehbar dokumentiert werden.

Viel Erfolg wünschen Thomas Blott, Pascal Hauser, Andreas Kilberth, Dennis Krüger, Mattieu Penserini, Gérald Prétôt, Raphael Ugolini und Beat Zemp.

---

1. Vektorgeometrie

Gegeben sind die drei Punkte $A(-2|-1|1)$, $B(1|3|0)$ und $C(5|-5|-3)$, sowie die Geraden

$$g:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie:

a) die Koordinatengleichung der Ebene E durch die Punkte A, B, C und zeigen Sie, dass die Geraden g und h einander im Punkt $S(2|6|10)$ schneiden. (3P)

Hinweis: Falls Sie kein Resultat aus a) erhalten haben, rechnen Sie für die folgenden Teilaufgaben mit der Ersatzlösung E: $4x - y + 8z - 1 = 0$.

b) die Koordinaten des Punktes S*, den man durch Spiegelung von S an der Ebene E erhält. (3P)

c) das Volumen der Doppelpyramide ABCSS* mit der Grundfläche ABC und den beiden Spitzen S und S*. (3P)

d) den Neigungswinkel α der Pyramidenkante BS gegenüber der Grundfläche ABC und den spitzen Schnittwinkel β der Pyramidenseitenfläche BCS mit der Grundfläche ABC. (3P)

2. Differential- und Integralrechnung

Hinweis: Für alle Teilaufgaben sind Endresultate auf 4 Nachkommastellen zu runden.

Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{3}{40}x^3-\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{10}x$.

a) Berechnen Sie die vollständigen Koordinaten aller Hochpunkte des Graphen von f. (2P)

b) Finden Sie diejenigen Stellen, für welche f die Steigung 2 besitzt. (1P)

c) *Hinweis: Für die volle Punktzahl muss diese Teilaufgabe vollständig ohne Taschenrechner gelöst werden.*
Berechnen Sie alle Nullstellen von f. (2P)

d) Die Funktion f schliesst für $x \geq 0$ zwei Flächenstücke mit der x-Achse ein. Um welchen Faktor ist das grössere Flächenstück grösser als das kleinere Flächenstück? (2P)

Für die folgenden Betrachtungen ersetzen wir den Koeffizienten $\frac{3}{40}$ durch einen reellen Parameter $t > 0$ und verallgemeinern auf diese Weise unsere Funktion $f(x)=\frac{3}{40}x^3-\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{10}x$ zu einer Funktionenschar $f_t(x)=t\ x^3-\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{10}x$.

e) Berechnen Sie alle Wendestellen der Funktionenschar f_t. (2P)

f) Für die folgende Teilaufgabe betrachten wir die Funktionenschar $f_t(x)$ sowie die Parabel mit der Gleichung $g(x)=0.1\cdot(x-10)^2-2$. Bestimmen Sie t so, dass der Abstand d zwischen dem Scheitelpunkt der Parabel g und dem Wendepunkt $W\left(\frac{1}{15\ t}\ \middle|\ \frac{1}{150\ t}-\frac{2}{3375\ t^2}\right)$ der Funktion f_t minimal ist und berechnen Sie diesen Minimalabstand. (3P)

3. Gebrochen-rationale Funktionen

I) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{4x-4}{x^3}$.

a) Wo schneidet der Graph von f die x- bzw. y-Achse? (1P)

b) Bestimmen Sie ohne den Taschenrechner zu verwenden entweder rechnerisch oder mit Hilfe einer präzisen Begründung in Worten alle Polstellen und Asymptoten des Graphen von f. (1P)

c) Zeigen Sie ohne den Taschenrechner zu benutzen, dass der Graph von f weder punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung noch achsensymmetrisch zur y-Achse ist. (1P)

d) Zum Erreichen der gesamten Punktzahl muss diese Teilaufgabe vollständig per Hand gelöst werden: Berechnen Sie alle Schnittpunkte $S(x_S \mid y_S)$ des Graphen von f mit dem Graphen von $g(x) = x^{-2}$. (1.5P)

e) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangenten an den Graphen von f an der Stelle x = 3. (1.5P)

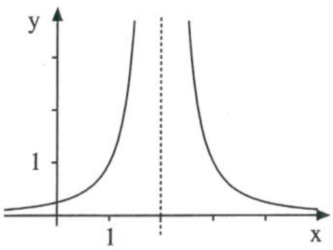
f) Zeigen Sie ohne Taschenrechner, dass F mit $F(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x}$ eine Stammfunktion von f ist! (1P)

g) Wie muss die Stelle k gewählt werden, damit die Fläche, die im 1. Quadranten vom Graphen von f, der x-Achse und der vertikalen Geraden bei x = k eingeschlossen wird, den Inhalt 0.5 (Flächeneinheiten) besitzt? (1P)

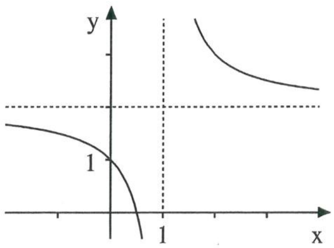
II) Rekonstruktion von gebrochen-rationalen Funktionen

a) Bestimmen Sie für die beiden Fälle a_1 und a_2 die Gleichung einer Funktion f_1 und f_2, deren Graph im Prinzip wie abgebildet verläuft! (2P)

Hinweis: Die gestrichelten Linien auf den Abbildungen stellen Polstellen bzw. Asymptoten dar. Der Graph entspricht der durchgezogenen Kurve.



a_1)



a_2)

b) Geben Sie (falls möglich) die Gleichung einer gebrochen-rationalen Funktion für Aufgabe b_1 und b_2 an! Falls keine gebrochen-rationale Funktion mit den gewünschten Eigenschaften existiert, begründen Sie dies bitte kurz und präzise.

b_1) Der Graph der Funktion f_3 weist eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel von Minus Unendlich zu Minus Unendlich an der Stelle $x = -4$ auf und besitzt die waagerechte Asymptote $y = -2$. (1P)

b_2) Der Graph der Funktion f_4 hat eine Polstelle bei x = 5 und ist achsensymmetrisch zur y-Achse. (1P)

4. Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

a) Ein Unternehmen nutzt zur Entscheidung über die Einstellung von neuen Mitarbeitern einen Intelligenztest. Bei diesem Test stehen 4 Umschläge zur Verfügung: In 2 Umschlägen befindet sich jeweils eine mathematische Knobelaufgabe, in einem Umschlag eine Textverständnisaufgabe und in einem Umschlag ein Fragebogen zum Allgemeinwissen. Eine Bewerberin schätzt, dass sie den Fragebogen zum Allgemeinwissen mit 80%iger Wahrscheinlichkeit richtig löst. Bei den beiden anderen Themengebieten schätzt sie ihre Erfolgswahrscheinlichkeit auf je 70%.

Man geht davon aus, dass die Bewerberin ihre Erfolgswahrscheinlichkeit realistisch einschätzt. Sie muss zuerst einen der 4 Umschläge zufällig auswählen und anschliessend die entsprechende Aufgabe lösen.

a_1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht die Bewerberin den Fragebogen zum Allgemeinwissen und löst ihn richtig? (1P)

a_2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht sie den Intelligenztest nicht? (1.5P)

b) Das Unternehmen bietet die Möglichkeit an, ein Schnupperpraktikum durchzuführen. Daraufhin erhält es Bewerbungen von 25 Schülerinnen und 20 Schülern. 10 Bewerbungen sollen ausgewählt und die Personen zu einem kurzen Interview eingeladen werden. Eine Angestellte schlägt der Personalabteilung vor, die Auswahl zufällig vorzunehmen.

b_1) Auf wie viele Arten kann man aus 45 Bewerbungen zehn auswählen, wenn das Geschlecht keine Rolle spielt? (1P)

b_2) Auf wie viele Arten kann man dies tun, wenn unter den ausgewählten Bewerbern 6 Schülerinnen und vier Schüler sein sollen? (1P)

Nachdem 6 Schülerinnen und 4 Schüler zufällig ausgewählt wurden, sollen diese nun zum Interview eingeladen werden.

b_3) Wie viele verschiedene Reihenfolgen gibt es, die 10 Personen nacheinander einzuladen, wenn das Geschlecht keine Rolle spielt? (1P)

b_4) Wie viele verschiedene Reihenfolgen gibt es, wenn Personen gleichen Geschlechts nacheinander interviewt werden sollen? (2P)

c) Das Unternehmen sucht auch neue Mitarbeiter für die Marketingabteilung. Aus Erfahrung weiss das Unternehmen allerdings, dass nur 40% aller Bewerbungen den gewünschten Anforderungen (Qualifikation, Berufserfahrung usw.) entsprechen. Hier sollen 6 Bewerbungen zufällig ausgewählt werden.

c_1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 6 ausgewählten Bewerbungen genau 4 den gewünschten Anforderungen entsprechen? (1.5P)

c_2) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den 6 ausgewählten Bewerbungen mindestens 4 den gewünschten Anforderungen entsprechen? (2P)

c_3) Die Angestellte aus der Personalabteilung behauptet: Wenn wir 2 Bewerbungen auswählen würden, dann wäre die Wahrscheinlichkeit, dass sich darunter mindestens eine Person mit den gewünschten Anforderungen befindet, zweimal 40%, also 80%. Überprüfen Sie diese Aussage und begründen Sie Ihre Antwort. (1P)

5. Verschiedene voneinander unabhängige Aufgaben

5.1 Rotationsvolumen

Der Graph der Funktion $f(x) = 2\sqrt{x} + 3$ rotiert im Intervall $[0;9]$ um die x-Achse. Der entstehende Rotationskörper stellt einen auf der Seite liegenden 9 cm hohen Blumentopf dar.

a) Zeichnen Sie in einem Koordinatensystem den Graphen der Funktion im angegebenen Intervall und skizzieren Sie dort den entstehenden Rotationskörper. (1.5P)

b) Bestimmen Sie den Durchmesser des Blumentopfes am Boden und an der Oberkante. (1P)

c) *Für die volle Punktzahl muss diese Teilaufgabe so weit wie möglich von Hand gelöst werden.*
Bestimmen Sie das Volumen des Blumentopfes. (2.5P)

d) Bis zu welcher Höhe ist der Blumentopf mit Erde gefüllt, wenn man 1 Liter Blumenerde einfüllt? (2P)

5.2 Vektorgeometrie

Gegeben sind die Gerade g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, die Ebene E: $2x - y - 2z = -5$ sowie der Punkt A(1|–1| z).

a) Der Punkt A liegt in der Ebene E. Bestimmen Sie z. (1P)

b) Zeigen Sie, dass g zwar nicht in E liegt, jedoch parallel zu E ist. (2P)

c) Bestimmen Sie den Abstand von g zu E. (2P)