gymnasium liestal

Maturitätsprüfungen 2012 – Mathematik schriftlich
Klassen: 4AB, 4B, 4B(M) (Hg, Lf, Pr)

Prüfungsdauer:	4 h
Erlaubte Hilfsmittel:	CAS-Taschenrechner mit Anleitung. Formelsammlung.
Bemerkungen:	Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt. Die Arbeit mit dem Taschenrechner muss dokumentiert sein. Bei jeder Aufgabe steht die maximale Punktzahl.

Vektorrechnung (12 Punkte)

1. Gegeben sind der Punkt $P(12|1|1)$, die Gerade $g\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die Gerade m, welche parallel zur z-Achse verläuft und durch den Punkt $Q(1|0|0)$ geht.

   (a) P und g bestimmen eine Ebene E. Weisen Sie nach, dass E die Koordinatengleichung $x + 2y + 2z - 16 = 0$ hat. (2 P.)

   (b) Eine zu m parallele Gerade m' schneidet die Gerade g. Berechnen Sie den Winkel φ zwischen m' und g. (1 P.)

   (c) E soll Tangentialebene der Kugel k mit Radius 3 sein, deren Mittelpunkt M auf der Geraden m liegt und minimale z-Koordinate hat. Zeigen Sie, dass M die Koordinaten $(1|0|3)$ hat. (3 P.)

   (d) Wie lautet die Parametergleichung derjenigen Kugeltangente h an k, die in E liegt und die z-Achse schneidet? (2 P.)

   (e) Zwei zu E parallele Ebenen F_1 und F_2 schneiden die Kugel k in den Kreisen k_1 und k_2 mit den Radien $r_1 = r_2 = \sqrt{8}$.

      i. Welche Koordinaten haben die Mittelpunkte M_1 und M_2 der Kreise k_1 und k_2? (2 P.)

      ii. Wie lauten die Koordinatengleichungen von F_1 und F_2? (2 P.)

Stochastik (12 Punkte)

2. In einem Wettermodell werden die Tage unterteilt in N-Tage (Tage mit Niederschlag), B-Tage (bewölkte Tage ohne Niederschlag und ohne Sonnenschein) und S-Tage (Sonnentage ohne Bewölkung und ohne Niederschlag).

   Für das Elsass sind auf Grund langjähriger statistischer Erhebungen die folgenden Wahrscheinlichkeiten ermittelt worden:

   Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen N-Tag ein B-Tag folgt (oder umgekehrt), ist 0.2.

   Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen B-Tag ein S-Tag folgt (oder umgekehrt), ist 0.2.

   Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen N-Tag ein S-Tag folgt (oder umgekehrt), ist 0.1.

   (a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit der folgenden drei Ereignisse:
      i. Auf einen N-Tag folgt ein N-Tag? (0.5 P.)
      ii. Auf einen B-Tag folgt ein B-Tag? (0.5 P.)
      iii. Auf einen S-Tag folgt ein S-Tag? (0.5 P.)

   (b) Ein Freitag sei ein S-Tag. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der darauffolgende Sonntag ebenfalls ein S-Tag? (1 P.)

   (c) Ein Freitag und der darauffolgende Sonntag seien S-Tage. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war unter dieser Voraussetzung der dazwischenliegende Samstag ebenfalls ein S-Tag? (1 P.)

   (d) Wir betrachten nun eine Anzahl von n aufeinanderfolgenden Tagen. Der erste Tag sei ein N-Tag. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für die folgenden beiden Ereignisse:
      i. Dem N-Tag folgen lauter B-Tage? (1 P.)
      ii. Abwechslungsweise folgen einander N-Tage und S-Tage? (1 P.)

   (e) Wie lange muss eine betrachtete Periode von n Tagen mindestens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als 10% alle n Tage N-Tage sind? (1.5 P.)

   (f) In der Verallgemeinerung dieses Wettermodells werden folgende Annahmen gemacht:

      Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen N-Tag ein B-Tag folgt (oder umgekehrt), ist a.

      Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen B-Tag ein S-Tag folgt (oder umgekehrt), ist ebenfalls a.

      Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen N-Tag ein S-Tag folgt (oder umgekehrt), ist hingegen nur $\frac{a}{2}$.

      Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse als Funktion von a:
      i. Auf einen N-Tag folgt ein N-Tag? (1 P.)
      ii. Auf einen B-Tag folgt ein B-Tag? (1 P.)
      iii. Auf einen S-Tag folgt ein S-Tag? (1 P.)

   (g) Wir betrachten nun in diesem verallgemeinerten Wettermodell eine Sequenz von n aufeinanderfolgenden Tagen. Der erste Tag sei dabei ein N-Tag.
      i. Berechnen Sie als Funktion von n und a die Wahrscheinlichkeit, dass jeder der $n-1$ folgenden Tage ein S-Tag ist. (1 P.)
      ii. Wie gross muss a (in Funktion von n) gewählt werden, damit diese Wahrscheinlichkeit maximal ist? (1 P.)

Analysis (12 Punkte)

3. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = \ln\left(\frac{x^2+k^2}{x}\right), \quad k > 0.$

   (a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Schar und die Nullstellen der Funktionen $f_k(x)$. Diskutieren Sie die Anzahl Nullstellen in Abhängigkeit von k. (3 P.)

   (b) Berechnen Sie ohne Taschenrechner die Koordinaten der Extremalpunkte. (2.5 P.)

   (c) Untersuchen Sie den Vorzeichenwechsel von $f_k'(x)$ an den Extremalstellen und begründen Sie so, ob ein Maximum oder ein Minimum vorliegt. (1.5 P.)

   (d) Begründen Sie, dass die Minima auf der Kurve mit der Gleichung $g(x) = \ln(2x)$ liegen. (1 P.)

   (e) Weisen Sie nach, dass der Graph von $h(x) = \ln(x)$ stets unterhalb des Graphen von $f_k(x)$ verläuft. (1.5 P.)

   (f) Berechnen Sie den Inhalt der sich ins Unendliche erstreckenden Fläche, die begrenzt wird von der x-Achse und den Graphen der Funktionen $f_1(x)$, $g(x)$ und $h(x)$. (2.5 P.)

Analysis (12 Punkte)

4. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = \frac{x^2 + a(a-1)x - a^2(a-1)}{ax - a^2}, \quad a > 0.$

   (a) Bestimmen Sie für $f_a(x)$ Definitionsbereich, Extremalpunkte inkl. ihrer Art, Wendepunkte und Gleichungen der Asymptoten. (4 P.)

   (b) Die Gerade $g_a(x)$ gehe durch die Extremalpunkte der Graphen von $f_a(x)$. Welche Beziehung muss zwischen zwei verschiedenen Werten a_1 und a_2 des Parameters a bestehen, damit sich die beiden Geraden g_{a_1} und g_{a_2} rechtwinklig schneiden? (2.5 P.)

   (c) Bestimmen Sie die Anzahl der Tangenten, die sich vom Punkt $P(0|2)$ aus an den Graphen der Funktion $f_2(x)$ legen lassen. (2 P.)

   (d) Die y-Achse, die Gerade $h\colon y = -\frac{3}{2}x + 2$ und der Graph von $f_2(x)$ begrenzen eine Fläche. Berechnen Sie deren Inhalt ohne Taschenrechner.
   Tipp: Beachten Sie die Resultate der Teilaufgabe (a). (3.5 P.)

Vollständige Induktion, Uneigentliches integral und Volumen eines Rotationskörpers (12 Punkte)

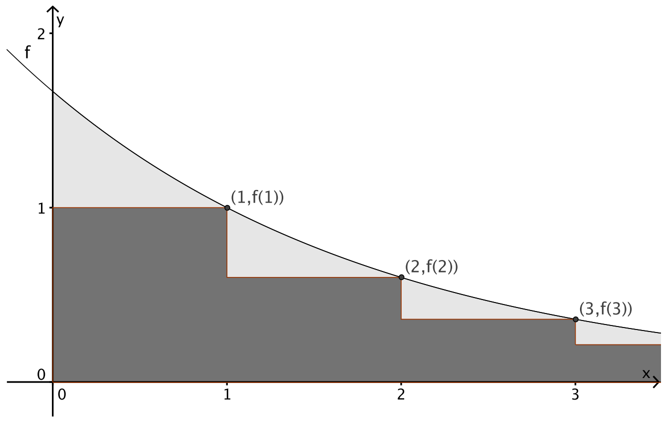
5. Zum Jahrestag des Hotels Hilbert soll eine unendlich-schichtige Torte nach folgenden Anweisungen hergestellt werden:

   - Alle Schichten der Torte sind zylindrisch.
   - Alle Zylinder sind gleich hoch, nämlich eine Einheit ($h = 1$).
   - Der Radius der untersten Schicht beträgt eine Einheit ($r_0 = 1$).
   - Der Radius des n-ten Zylinders ($n > 0$) beträgt $r_n = q \cdot r_{n-1}$, für ein festes $q \in \mathbb{R}, 0 < q < 1$.

   (a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass das Gesamtvolumen bis und mit n-ter Schicht $V_n = \pi \cdot \frac{1-q^{2(n+1)}}{1-q^2}$ Volumeneinheiten beträgt, wobei V_0 das Volumen der untersten Schicht bezeichne. (4 P.)

   (b) Zeigen Sie mittels Grenzwertbetrachtung, dass das Volumen der ganzen unendlich-schichtigen Torte für $0 < q < 1$ endlich ist und berechnen Sie das Volumen für $q = 0.6$. (2 P.)

   (c) Betrachten wir den Querschnitt der Torte und legen diesen so in ein Koordinatensystem, dass die x-Achse die Rotationsachse der Torte bildet, so ergibt sich folgendes Bild (Ausschnitt):



   Wie lautet die Funktion f, deren Graph den Tortenquerschnitt wie im Bild angedeutet am jeweils oberen Rand jeder Tortenschicht berührt? (2 P.)

   (d) Rotation des Graphen von f für $x \geq 0$ um die x-Achse ergibt einen Körper, welcher die Torte vollständig umhüllt. Wie gross ist das Volumen dieses Körpers für $q = 0.6$? (4 P.)