gymnasiumliestal

Maturitätsprüfungen 2012 – Mathematik schriftlich
Klassen: 4AB, 4B, 4B(M)   (Hg, Lf, Pr)

Prüfungsdauer:	4 h
Erlaubte Hilfsmittel:	CAS-Taschenrechner mit Anleitung. Formelsammlung.
Bemerkungen:	Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt. Die Arbeit mit dem Taschenrechner muss dokumentiert sein. Bei jeder Aufgabe steht die maximale Punktzahl.

Vektorrechnung (12 Punkte)

1. Gegeben sind der Punkt $P(12|1|1)$, die Gerade $g\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die Gerade m, welche parallel zur z-Achse verläuft und durch den Punkt $Q(1|0|0)$ geht.

   (a) P und g bestimmen eine Ebene E. Weisen Sie nach, dass E die Koordinatengleichung $x + 2y + 2z - 16 = 0$ hat. (2 P.)

   (b) Eine zu m parallele Gerade m' schneidet die Gerade g. Berechnen Sie den Winkel φ zwischen m' und g. (1 P.)

   (c) E soll Tangentialebene der Kugel k mit Radius 3 sein, deren Mittelpunkt M auf der Geraden m liegt und minimale z-Koordinate hat. Zeigen Sie, dass M die Koordinaten $(1|0|3)$ hat. (3 P.)

   (d) Wie lautet die Parametergleichung derjenigen Kugeltangente h an k, die in E liegt und die z-Achse schneidet? (2 P.)

   (e) Zwei zu E parallele Ebenen F_1 und F_2 schneiden die Kugel k in den Kreisen k_1 und k_2 mit den Radien $r_1 = r_2 = \sqrt{8}$.

      i. Welche Koordinaten haben die Mittelpunkte M_1 und M_2 der Kreise k_1 und k_2? (2 P.)

      ii. Wie lauten die Koordinatengleichungen von F_1 und F_2? (2 P.)

Stochastik (12 Punkte)

2. In einem Wettermodell werden die Tage unterteilt in N-Tage (Tage mit Niederschlag), B-Tage (bewölkte Tage ohne Niederschlag und ohne Sonnenschein) und S-Tage (Sonnentage ohne Bewölkung und ohne Niederschlag).

   Für das Elsass sind auf Grund langjähriger statistischer Erhebungen die folgenden Wahrscheinlichkeiten ermittelt worden:

   Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen N-Tag ein B-Tag folgt (oder umgekehrt), ist 0.2.

   Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen B-Tag ein S-Tag folgt (oder umgekehrt), ist 0.2.

   Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen N-Tag ein S-Tag folgt (oder umgekehrt), ist 0.1.

   (a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit der folgenden drei Ereignisse:
      i. Auf einen N-Tag folgt ein N-Tag? (0.5 P.)
      ii. Auf einen B-Tag folgt ein B-Tag? (0.5 P.)
      iii. Auf einen S-Tag folgt ein S-Tag? (0.5 P.)

   (b) Ein Freitag sei ein S-Tag. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der darauffolgende Sonntag ebenfalls ein S-Tag? (1 P.)

   (c) Ein Freitag und der darauffolgende Sonntag seien S-Tage. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war unter dieser Voraussetzung der dazwischenliegende Samstag ebenfalls ein S-Tag? (1 P.)

   (d) Wir betrachten nun eine Anzahl von n aufeinanderfolgenden Tagen. Der erste Tag sei ein N-Tag. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für die folgenden beiden Ereignisse:
      i. Dem N-Tag folgen lauter B-Tage? (1 P.)
      ii. Abwechslungsweise folgen einander N-Tage und S-Tage? (1 P.)

   (e) Wie lange muss eine betrachtete Periode von n Tagen mindestens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als 10% alle n Tage N-Tage sind? (1.5 P.)

   (f) In der Verallgemeinerung dieses Wettermodells werden folgende Annahmen gemacht:

      Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen N-Tag ein B-Tag folgt (oder umgekehrt), ist a.

      Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen B-Tag ein S-Tag folgt (oder umgekehrt), ist ebenfalls a.

      Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen N-Tag ein S-Tag folgt (oder umgekehrt), ist hingegen nur $\frac{a}{2}$.

      Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse als Funktion von a:
      i. Auf einen N-Tag folgt ein N-Tag? (1 P.)
      ii. Auf einen B-Tag folgt ein B-Tag? (1 P.)
      iii. Auf einen S-Tag folgt ein S-Tag? (1 P.)

   (g) Wir betrachten nun in diesem verallgemeinerten Wettermodell eine Sequenz von n aufeinanderfolgenden Tagen. Der erste Tag sei dabei ein N-Tag.
      i. Berechnen Sie als Funktion von n und a die Wahrscheinlichkeit, dass jeder der $n-1$ folgenden Tage ein S-Tag ist. (1 P.)
      ii. Wie gross muss a (in Funktion von n) gewählt werden, damit diese Wahrscheinlichkeit maximal ist? (1 P.)

Analysis (12 Punkte)

3. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+k^2}{x}\right), \quad k > 0.$

   (a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Schar und die Nullstellen der Funktionen $f_k(x)$. Diskutieren Sie die Anzahl Nullstellen in Abhängigkeit von k. (3 P.)

   (b) Berechnen Sie ohne Taschenrechner die Koordinaten der Extremalpunkte. (2.5 P.)

   (c) Untersuchen Sie den Vorzeichenwechsel von $f_k'(x)$ an den Extremalstellen und begründen Sie so, ob ein Maximum oder ein Minimum vorliegt. (1.5 P.)

   (d) Begründen Sie, dass die Minima auf der Kurve mit der Gleichung $g(x) = \ln(2x)$ liegen. (1 P.)

   (e) Weisen Sie nach, dass der Graph von $h(x) = \ln(x)$ stets unterhalb des Graphen von $f_k(x)$ verläuft. (1.5 P.)

   (f) Berechnen Sie den Inhalt der sich ins Unendliche erstreckenden Fläche, die begrenzt wird von der x-Achse und den Graphen der Funktionen $f_1(x)$, $g(x)$ und $h(x)$. (2.5 P.)

Analysis (12 Punkte)

4. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = \dfrac{x^2 + a(a-1)x - a^2(a-1)}{ax - a^2}, \quad a > 0.$

   (a) Bestimmen Sie für $f_a(x)$ Definitionsbereich, Extremalpunkte inkl. ihrer Art, Wendepunkte und Gleichungen der Asymptoten. (4 P.)

   (b) Die Gerade $g_a(x)$ gehe durch die Extremalpunkte der Graphen von $f_a(x)$. Welche Beziehung muss zwischen zwei verschiedenen Werten a_1 und a_2 des Parameters a bestehen, damit sich die beiden Geraden g_{a_1} und g_{a_2} rechtwinklig schneiden? (2.5 P.)

   (c) Bestimmen Sie die Anzahl der Tangenten, die sich vom Punkt $P(0|2)$ aus an den Graphen der Funktion $f_2(x)$ legen lassen. (2 P.)

   (d) Die y-Achse, die Gerade $h\colon y = -\dfrac{3}{2}x + 2$ und der Graph von $f_2(x)$ begrenzen eine Fläche. Berechnen Sie deren Inhalt ohne Taschenrechner.
   Tipp: Beachten Sie die Resultate der Teilaufgabe (a). (3.5 P.)

Kurzaufgaben (12 Punkte)

5. Diese Aufgabe besteht aus drei voneinander unabhängigen Teilaufgaben.

   (a) Peter muss ein Medikament einnehmen. Der Abbau dieses Medikamentes verläuft so, dass die Abnahmegeschwindigkeit der Konzentration zu einem beliebigen Zeitpunkt t proportional ist zur Konzentration zum selben Zeitpunkt. Die Konzentration ist nach 4 Stunden auf 60 % gesunken. Peter soll erst wieder Auto fahren, wenn die Konzentration des Medikamentes auf 5 % der Anfangskonzentration gefallen ist. Wie lange (nach Einnahme des Medikamentes) darf Peter nicht Auto fahren? (4 P.)

   (b) Ein quaderförmiges Paket soll 16 Kubikdezimeter Inhalt haben. Die Seitenlängen seiner Grundfläche sollen sich wie 2 : 3 verhalten. Berechnen Sie (auf 1 mm genau) die Abmessungen des Pakets, wenn man ausserdem möglichst wenig Papier zum Einwickeln (minimale Oberfläche) verwenden möchte. Zeigen Sie, dass der Extremwert ein Minimum ist. (4 P.)

   (c) Gegeben ist die Reihe

$$1 - \left(\frac{x}{x-1}\right)^1 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - \left(\frac{x}{x-1}\right)^3 + \cdots \quad .$$

   Bestimmen Sie die Menge aller x-Werte, für die diese Reihe konvergiert. Wie gross ist die Summe der konvergenten Reihe? (4 P.)