## Maturitätsprüfungen 2011 – Mathematik schriftlich

**Klassen: 4IZ, 4MW, 4S, 4Wa, 4Wb, 5KSW** (Er, Fr, Hg, Mo, Ug, Wn)

Prüfungsdauer: 4 h

Erlaubte Hilfsmittel: Formelsammlung "Fundamentum" und Taschenrechner TI–89 resp. TI Voyage 200.

Alle Aufgaben ergeben je maximal 10 Punkte. Die Teilpunktzahlen sind bei jeder Teilaufgabe ersichtlich.

---

### 1. Vektorgeometrie

Gegeben sind die drei Punkte A(6|0|0), B(3|4|1) und D(–2|–3|2), sowie die Parameterdarstellung der Geraden g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Zeichnen Sie die Punkte A, B und D, sowie die Gerade g möglichst genau in das Koordinatensystem auf der folgenden Seite. (1.5 Punkte)

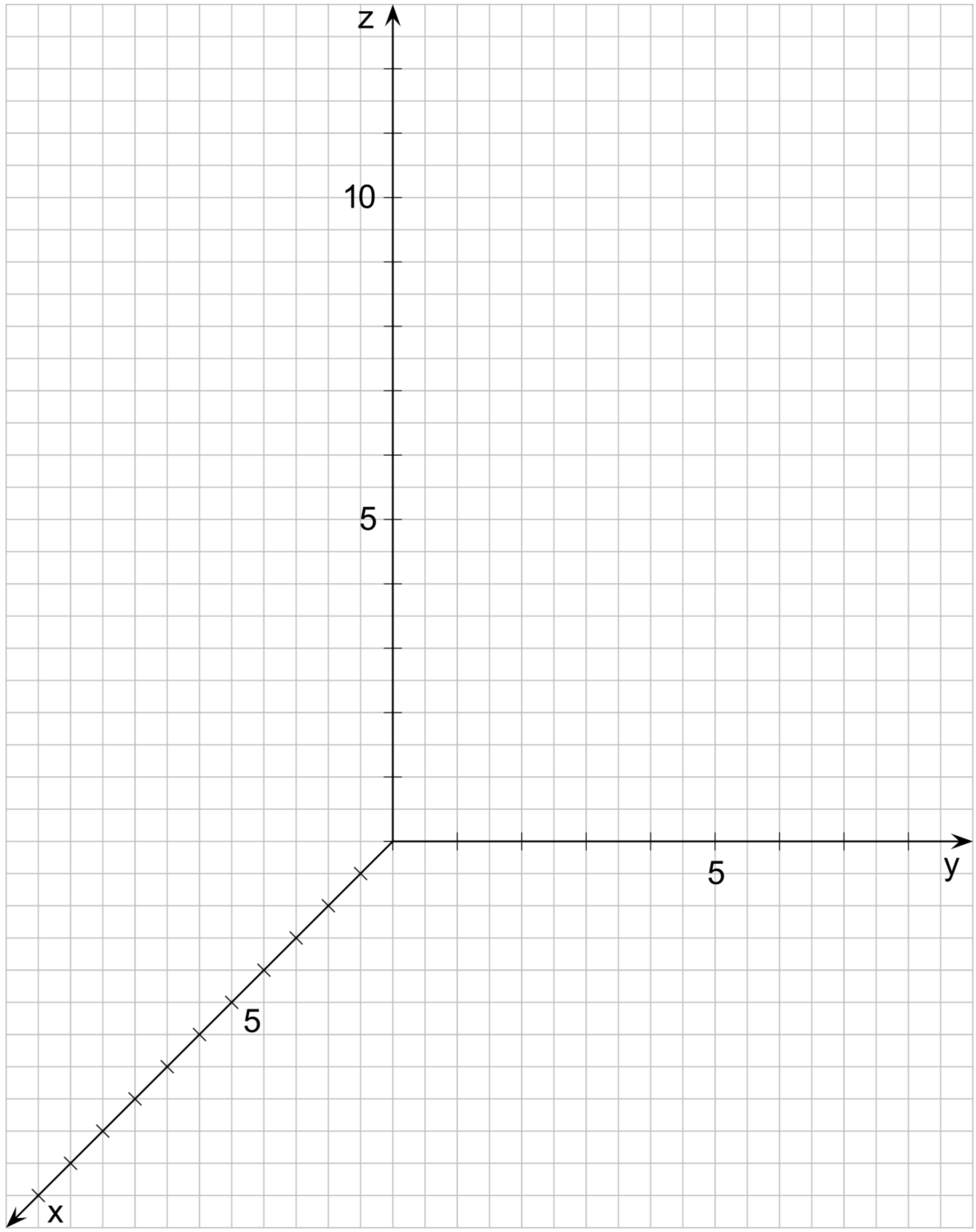
b) Zeigen Sie, dass mit dem Punkt C(–5|1|3) das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist, in dem sich die Ecken A und C diagonal gegenüber stehen. (1 Punkt)

c) Von welchen Punkten der Geraden g aus erscheint die Strecke $\overline{AD}$ unter einem Winkel von 30.666°? Runden Sie die Koordinaten auf eine Dezimalstelle. (3 Punkte)

d) Das Parallelogramm ABCD bildet den Boden einer schiefen Pyramide, d.h. die Spitze der Pyramide liegt nicht senkrecht über dem Mittelpunkt des Parallelogramms. Die Spitze S der Pyramide soll auf der Geraden g liegen.
Bestimmen Sie S so, dass das Volumen der Pyramide 103 Volumeneinheiten besitzt. (3 Punkte)

e) Rechnen Sie im Folgenden mit der Pyramidenspitze S(–1|3|9).
Vom Punkt B aus soll ein Lichtstrahl parallel zur Geraden g in die durchsichtige Pyramide hinein laufen.
Berechnen Sie den Punkt L im Dreieck CDS, in dem der Lichtstrahl die Pyramide verlässt. (1.5 Punkte)

Koordinatensystem zu Aufgabe 1a)



## 2. Differential- und Integralrechnung

*Die Teilaufgaben a) und b) sind von einander unabhängig.*

a) Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades besitzt Nullstellen in $x_1 = -3$ und $x_2 = 2$. Der Graph und die x-Achse schliessen zwischen den beiden Nullstellen eine Fläche A mit dem Flächeninhalt $\frac{625}{24}$ ein. In der linken Nullstelle $x_1$ beträgt die Steigung der Kurve $\frac{25}{2}$.

$a_1$) Wie lautet die Funktionsgleichung? Skizzieren Sie den Graphen der Funktion. (2 Punkte)

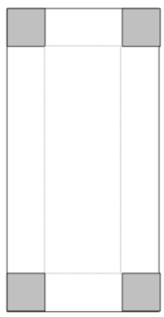
*Hinweis: Verwenden Sie die Ersatzfunktion* $f(x) = \frac{1}{10}x^3 - \frac{11}{10}x^2 - \frac{9}{5}x + \frac{36}{5}$ *für die folgenden Teilaufgaben, falls Sie die Aufgabe* $a_1$ *nicht lösen konnten. Diese Funktion besitzt auch die Nullstellen* $x_1 = -3$ *und* $x_2 = 2$ *und den Flächeninhalt* $\frac{625}{24}$ *zwischen diesen beiden Nullstellen.*
*Die folgenden Teilaufgaben müssen ohne die speziellen CAS-Funktionen des Taschenrechners (z.B. solve, d, ∫, usw.) gelöst werden.*

$a_2$) Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunkts. (1.5 Punkte)

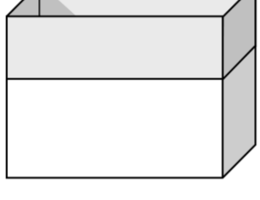
$a_3$) In welchem exakten Verhältnis teilt die y-Achse die Fläche A? (1.5 Punkte)

b) Aus einem dünnen rechteckigen Blech mit der Länge 2 m und der Breite 1 m soll ein quaderförmiger, oben offener Behälter mit möglichst grossem Volumen hergestellt werden. Die Dicke des Blechs wird bei den Berechnungen nicht berücksichtigt.

$b_1$) Dies kann mit Materialverlust bewerkstelligt werden, in dem an den Ecken des Blechs Quadrate mit der Seitenlänge x weggeschnitten werden, die Seitenflächen hochgeklappt und die Kanten verschweisst werden.
Berechnen Sie die Länge, die Breite und die Höhe dieses Behälters mit maximalem Volumen und geben Sie das Volumen in Liter an. (3 Punkte)



$b_2$) Ein findiger Mechaniker will die weggeschnittenen Quadrate mit der Seitenlänge x einschmelzen und daraus ein streifenförmiges Blech gleicher Dicke herstellen. Diesen Streifen schweisst er auf die hochgeklappten Seitenflächen auf, so dass ein höherer Behälter ohne Materialverlust entsteht.
Berechnen Sie den grösstmöglichen Volumeninhalt des Behälters dieser Art. (2 Punkte)



### 3. Differential- und Integralrechnung

Für den Parameter $k > 0$ ist die folgende Funktionsschar gegeben: $f_k(x) = \sqrt{e^x - k}$.

a) Berechnen Sie die Nullstellen von $f_k(x)$ und geben Sie den Definitionsbereich in Abhängigkeit von k an. (2 Punkte)

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunkts in Abhängigkeit von k und zeigen Sie, dass keine Punkte mit horizontalen Tangenten existieren. (2.5 Punkte)

c) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f_k(x)$ für $k = 4$ unter Berücksichtigung der obigen Resultate (Nullstelle, Definitionsbereich und Wendepunkt). (1 Punkt)

d) Rotiert der Graph der Funktion $f_4(x)$ um die x-Achse, entsteht eine offene, um 90° gedrehte Schale.
Berechnen Sie den Volumeninhalt dieser Schale in $cm^3$, wenn der x-Wert des Wendepunkts die Grösse der Schale nach rechts begrenzt. Die Einheit entspricht einer Länge von 5 cm. (2.5 Punkte)

*Hinweis: Falls Sie die Koordinaten des Wendepunkts nicht berechnen konnten, verwenden Sie für dessen x-Koordinate* $x_w = \ln(8)$.

e) Durch Variieren von $k > 0$ bewegt sich der Punkt $P\left(\ln(2k) \middle| \sqrt{k}\right)$ auf einer Kurve.
Berechnen Sie die zu dieser Kurve gehörige Funktionsgleichung. (2 Punkte)

## 4. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik

Ein wissenschaftliches Forschungsteam möchte die Konzentrationsfähigkeit von Probanden analysieren. Dabei werden die Testpersonen während des Lösens von Konzentrationsaufgaben gezielt dauernd gestört.

Für einen ersten Durchlauf des Versuches haben sich 12 Frauen und 8 Männer als Testpersonen gemeldet, die Pilotgruppe soll aber nur 6 Personen umfassen.

a) Wie viele Möglichkeiten der Gruppenbildung haben die Forscher, wenn…

- $a_1$) je 3 Frauen und 3 Männer in der Gruppe vertreten sein sollen? (1 Punkt)
- $a_2$) mindestens zwei Frauen und mindestens zwei Männer in der Gruppe vertreten sein sollen? (1 Punkt)

Es stellt sich heraus, dass die Frauen die Aufgaben mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% richtig lösen, während die Männer im Mittel 50% aller Aufgaben richtig lösen.

b) Eine Frau löst 10 Konzentrationsaufgaben.

- $b_1$) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie genau 8 Richtige hat? (1 Punkt)
- $b_2$) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens acht Aufgaben richtig sind? (2 Punkte)

c) Wie viele Aufgaben muss eine Frau mindestens lösen, damit sie vier oder mehr Aufgaben mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% richtig hat? (2 Punkte)

d) Die Pilotgruppe besteht schliesslich aus 4 Frauen und 2 Männern.

- $d_1$) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Mitglied der Pilotgruppe die richtige Antwort gibt? (1.5 Punkte)
- $d_2$) Ein Mitglied der Pilotgruppe hat eine richtige Antwort gegeben. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es eine Frau war? (1.5 Punkte)

## 5. Verschiedene, von einander unabhängige Teilaufgaben

5.1 Gegeben sind die Angebots- und Nachfragefunktion $y_A(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ und $y_N(x) = \frac{3}{2} \cdot (14 - x^2)$.

Berechnen Sie den Gesamterlös, wenn zum Marktpreis verkauft wird und x in 1000 Stück angeben ist.
Runden Sie auf eine natürliche Zahl. (2 Punkte)

5.2 Berechnen Sie die Preiselastizitätsfunktion $\varepsilon_N(x)$ für die Nachfragefunktion $y_N(x) = \frac{3}{2} \cdot (14 - x^2)$
.

Geben Sie an, für welche Menge die Nachfrage fliessend ist, wenn x in 1000 Stück angegeben ist. Runden Sie auf eine natürliche Zahl. (2 Punkte)

*Hinweis:* $\varepsilon(x) = \frac{y(x)}{x} \cdot \frac{1}{y'(x)}$

5.3 Die Grenzkostenfunktion ist $y_G(x) = \frac{1}{5}x^2 - 2x + 20$, wobei die Fixkosten 15 GE betragen.

a) Geben Sie die Gesamtkostenfunktion $y_K$ und die Durchschnittskostenfunktion $y_{K_D}$ an. (1 Punkt)

b) Berechnen Sie die langfristige Preisuntergrenze. (1 Punkt)

5.4 Optimales Campieren:
Eine Jugendgruppe beschliesst, Zelte für die Durchführung von gemeinsamen Wochenenden einzukaufen. In einem Sonderangebot werden 2 verschiedene Sorten Zelte für 10 bzw. 15 Personen pro Zelt preiswert angeboten. Von den 10-er Personenzelten sind noch 5 und von den 15-er Personenzelten sind nur noch 4 vorrätig. Die Zelte für 10 Personen kosten Fr. 200 pro Stück und diejenigen für 15 Personen Fr. 400 pro Stück. Die Jugendgruppe kann insgesamt höchstens Fr. 1800 für die Zelte ausgeben.

Wie viele 10-er und 15-er Personenzelte muss die Jugendgruppe kaufen, wenn eine möglichst grosse Anzahl von Jugendlichen in den Zelten untergebracht werden soll? Dokumentieren Sie Ihre Berechnungen mit einer klaren graphischen Darstellung des Lösungswegs. (4 Punkte)