gymnasium liestal

Maturitätsprüfungen 2011 – Mathematik schriftlich

Klassen: 4A, 4Ba, 4Bb (Lf, Gt, Hn)

Prüfungsdauer:	4 h
Erlaubte Hilfsmittel:	CAS-Taschenrechner mit Anleitung. Formelsammlung.
Bemerkungen:	Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt. Die Arbeit mit dem Taschenrechner muss dokumentiert sein. Bei jeder Aufgabe steht die maximale Punktzahl.

Analysis (12 Punkte)

1. Gegeben ist die Funktionsschar $f_k(x) = \left(\frac{k^2}{2} - x\right) \cdot e^{\frac{x}{k}}, \quad k \in \mathbb{R}^+$.

   (a) Bestimmen Sie von Hand die Nullstellen der Funktionen $f_k(x)$ sowie die Schnittpunkte der Graphen von $f_k(x)$ mit der y-Achse. (2 P.)

   (b) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden $g_k(x)$, die den Graphen von $f_k(x)$ auf den Koordinatenachsen schneidet. (2 P.)

   (c) Bestimmen Sie ohne Taschenrechner k so, dass die Gerade $g_k(x)$ senkrecht auf dem Graphen von $f_k(x)$ steht. (4 P.)

   (d) Berechnen Sie den Flächeninhalt der von den Graphen von $g_2(x)$ und $f_2(x)$ eingeschlossenen Fläche. (2 P.)

   (e) Der Graph von $f_k(x)$ begrenzt im 1. Quadranten mit der x-Achse eine Fläche A. Die Gerade $g_k(x)$ teilt A in zwei Teilflächen. Kann man k so wählen, dass die Flächeninhalte dieser beiden Teilflächen gleich gross sind? (2 P.)

Vektorrechnung (12 Punkte)

2. Gegeben sind zwei Geraden a und g und ein Punkt P:

$$a\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 24 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad g\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 18 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad P(-8|20|14)$$

a ist die Achse eines geraden Kreiszylinders der Höhe $h = 48$. Der gegebene Punkt P liegt auf der Kreislinie, welche die Deckfläche des Zylinders begrenzt.

(a) Beweisen Sie, ohne den Taschenrechner zu benützen:
   i. P liegt nicht auf a. (1 P.)
   ii. Die Gerade g steht windschief zur Geraden a. (1 P.)

(b) Berechnen Sie das Volumen des Zylinders. (2 P.)

(c) Stellen Sie die Koordinatengleichung der beiden Ebenen auf, in welchen der Grundkreis bzw. der Deckkreis des Zylinders liegen. (3 P.)

Beachten Sie: Der Grundkreis liegt tiefer als der Deckkreis. Zeigen Sie, dass dies bei Ihrer Lösung der Fall ist.

(d) Beweisen Sie, dass die gegebene Gerade g die Kreiszylinderfläche mit der Achse a, auf welcher der Punkt P liegt, berührt. (2 P.)

(e) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Tangentialebene des Zylinders, welche g enthält, und kontrollieren Sie Ihr Resultat, indem Sie den Abstand irgend eines Punktes der Geraden a von dieser Tangentialebene berechnen. Was muss sich nämlich ergeben? (3 P.)

Analysis (12 Punkte)

3. Gegeben ist die Funktionsschar $f_t(x) = \dfrac{x^2 - 3tx + 2t^2}{3 - x}, \quad t \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie für alle Graphen von $f_t(x)$ die Nullstellen, Pole und Asymptoten. Tipp: Sonderfälle beachten! (4 P.)

(b) Ist es möglich, t so zu wählen, dass der Graph von f_t die x-Achse berührt? (1 P.)

(c) Für welche Werte von t hat der Graph von $f_t(x)$ kein lokales Extremum? (2 P.)

(d) Der Graph von $f_4(x)$ schliesst im 1. Quadranten mit der x-Achse eine Fläche ein. Bestimmen Sie deren Flächeninhalt ohne Taschenrechner. (3 P.)

(e) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f_4(x)$, der Asymptoten, der Geraden mit der Gleichung $x = 3$ sowie der x-Achse im 1. Quadranten begrenzt wird. (1 P.)

(f) Die in (d) genannte Fläche rotiert um die x-Achse. Bestimmen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers. (1 P.)

Wahrscheinlichkeitsrechnung (12 Punkte)

4. Ein Glücksrad ist in drei Sektoren geteilt, von denen einer schwarz, einer weiss und einer grün gefärbt ist. s, w und g bezeichnen die Wahrscheinlichkeiten, dass beim Drehen des Rades Schwarz bzw. Weiss bzw. Grün erscheint. Für die ganze Aufgabe wird $g = 2w$ vorausgesetzt.

   (a) Das Rad wurde zwölfmal gedreht; dabei erschien Grün siebenmal, Weiss dreimal und Schwarz zweimal. Auf wieviele Arten kann dieses Ereignis eintreten? (1 P.)

   (b) Welche Werte sind aufgrund der Voraussetzung $g = 2w$ für w möglich? (1 P.)

   (c) w sei $\frac{1}{4}$. Das Rad wird dreimal gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint jede Farbe einmal? (1 P.)

   (d) w sei $\frac{1}{4}$. Das Rad wird viermal gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint jede Farbe mindestens einmal? (2 P.)

   (e) w sei $\frac{1}{4}$. Das Rad wird zwölfmal gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint Weiss mindestens dreimal? (1 P.)

   Bei den folgenden Teilaufgaben (f) und (g) spielen s und w keine Rolle, kommen also in der Lösung nicht vor.

   (f) Das Rad wird dreimal gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint Grün genau einmal? Für welchen Wert von g ist diese Wahrscheinlichkeit maximal? Diese Teilaufgabe ist ohne Taschenrechner zu lösen. (3 P.)

   (g) Ein Glücksspiel: der Spieler hat einen Einsatz von 1 Fr. zu bezahlen, dann wird das Rad dreimal gedreht. Erscheint Grün nie, hat der Spieler seinen Einsatz verloren. Erscheint Grün genau i mal, so erhält der Spieler seinen Einsatz zurück und dazu i Fr. als Gewinn, $i \in \{1, 2, 3\}$. Für welchen Wert von g ist das Spiel fair? (3 P.)

Kurzaufgaben (12 Punkte)

5. Diese Aufgabe besteht aus drei voneinander unabhängigen Teilaufgaben.

   (a) Berechnen Sie ohne Taschenrechner den Wert des folgenden Integrals, indem Sie die Zählerfunktion des Integranden nach der Nullstelle der Nennerfunktion des Integranden entwickeln: (4 P.)

$$\int_0^1 \frac{x^5 + 5x^4 + 7x^3 + x^2 + 2}{(x+1)^4}\,\mathrm{d}x.$$

   (b) Lösen Sie in $\mathbb{C}$ die nachfolgende Gleichung ohne Taschenrechner exakt (Lösung in Normalform): (4 P.)

$$z^2 + 2iz + i - 1 = 0.$$

   (c) Gegeben sind eine Drehstreckung $d(z)$ und eine Rotation $r(z)$, wobei z eine komplexe Zahl bedeutet. $d(z)$ hat als Zentrum den Ursprung und bildet den Punkt $P(3+2i)$ auf den Punkt $P^*(21+i)$ ab. $r(z)$ hat den Drehwinkel $\varphi = +90°$. Die Verkettung $r \circ d$ besitzt den Fixpunkt $F(1+i)$.
   Berechnen Sie das Zentrum M der Rotation $r(z)$. (4 P.)