Maturité 2011 – Examen écrit de mathématiques

Classes : 4IS, 4Sb (Zm)

Durée de l'examen :	4 h
Ressources autorisées :	Calculatrice TI-89 resp. TI Voyage 200 et son manuel Formulaire (*Fundamentum*) Dictionnaire français-allemand (fourni par le gymnase)
Remarques :	Chaque exercice est noté sur 10 points. Le détail des points est indiqué pour chaque question entre parenthèses.

---

1. Géométrie vectorielle

Soient les trois points $A\,(\,6\,|\,0\,|\,0\,)$, $B\,(\,3\,|\,4\,|\,1\,)$ et $D\,(\,-2\,|\,-3\,|\,2\,)$, ainsi que l'équation paramétrique de la droite d : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Représenter aussi précisément que possible les points A, B et D, ainsi que la droite d, dans le système de coordonnées xyz de la page suivante ; (1,5 P.)

(b) Soit le point $C\,(\,-5\,|\,1\,|\,3\,)$. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme ; (1 P.)

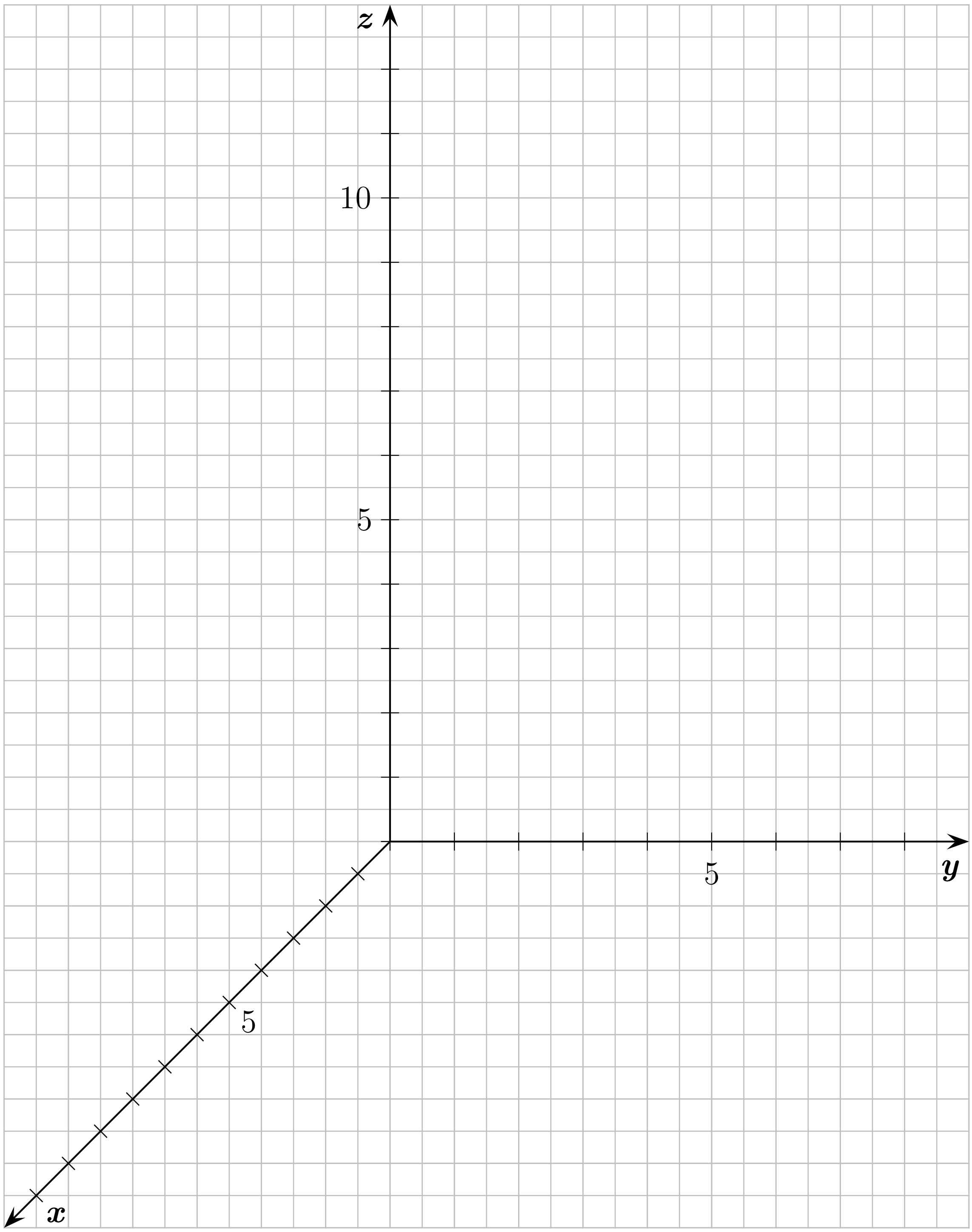
(c) A partir de quel point P de d le segment $\overline{AD}$ est-il vu sous un angle de $30,666\,^\circ$? Arrondir les coordonnées à une décimale ; (3 P.)

(d) Le parallélogramme $ABCD$ forme la base d'une pyramide oblique (le sommet de la pyramide ne se situe pas sur la perpendiculaire passant par le point milieu du parallélogramme). Le 5e sommet S_d de la pyramide appartient à la droite d. Déterminer S_d, sachant que le volume de la pyramide est de 103 unités de volume ; (3 P.)

(e) Calculer pour cette question avec $S_e\,(\,-1\,|\,3\,|\,9\,)$ (pour le 5e sommet).

Un rayon lumineux parallèle à d pénètre en B dans la pyramide $ABCDS_e$ qui est transparente (*durchsichtig*). Calculer les coordonnées du point L situé dans le triangle CDS_e, point où le rayon lumineux ressort de la pyramide. (1,5 P.)

Système de coordonnées (exercice 1a)



2. Calcul différentiel et intégral

Cet exercice comprend deux parties (a) et (b) indépendantes l'une de l'autre.

(a) Soit f une fonction polynomiale de degré 3 qui présente les conditions suivantes :

- $x_1 = -3$ et $x_2 = 2$ sont deux zéros de f ;
- le graphe de f et l'axe-x délimitent entre les deux zéros x_1 et x_2 une surface S dont l'aire est égale à $\frac{625}{24}$;
- en $x_1 = -3$, la courbe a une pente égale à $\frac{25}{2}$.

(i) Etablir une équation de la fonction f puis tracer son graphe ; (2 P.)

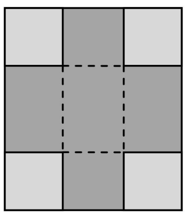
Si vous n'avez pas trouvé d'équation pour la fonction f, utilisez comme équation de remplacement $f(x) = \frac{1}{10}x^3 - \frac{11}{10}x^2 - \frac{9}{5}x + \frac{36}{5}$. Cette fonction admet également les zéros -3 et 2 ; l'aire délimitée est également $\frac{625}{24}$.

Les questions suivantes doivent être résolues à la main, c'est-à-dire sans les applications spéciales (*CAS*) de la calculatrice (par exemple *solve*, *d*, $\int$, etc.).

(ii) Calculer les coordonnées du point d'inflexion du graphe de f ; (1,5 P.)

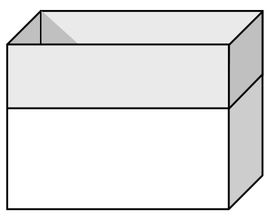
(iii) Dans quelle proportion (*Verhältnis*) exacte l'axe-y coupe-t-il la surface S ? (1,5 P.)

(b) Un contenant (*Behälter*) ouvert sur le dessus doit être réalisé à partir d'une plaque métallique (*Blech*) rectangulaire de longueur 2 m et largeur 1 m. On souhaite obtenir le plus grand volume possible. L'épaisseur de la plaque sera négligée dans le calcul.



(i) Ceci peut être réalisée en découpant un carré de côté x aux quatre coins de la plaque rectangulaire, puis en relevant les 4 parties latérales restantes et en soudant (*verschweissen*) leurs bords. Calculer les dimensions (longueur, largeur et hauteur) du contenant ainsi réalisé (de volume maximal) en précisant son volume en litres ; (3 P.)

(ii) Un mécanicien astucieux veut utiliser les quatre carrés qui ont été découpés (de côté x) : il veut fondre (*schmelzen*) ces carrés pour réaliser une autre plaque métallique allongée (*streifenförmiges Blech*), avec la même épaisseur que celle de la plaque initiale. Cette nouvelle plaque sera ensuite superposée par soudure sur les bords relevés du contenant. Il n'y a ainsi plus aucun déchet. Pour un contenant réalisé de cette façon, calculer le plus grand volume possible. (2 P.)



3. Calcul différentiel et intégral

Soit $f_k(x) = \sqrt{e^x - k}$ l'équation d'une famille de fonctions avec le paramètre réel $k > 0$.

(a) Donner le domaine de définition et calculer les zéros de f_k en fonction de k ; (2 P.)

(b) Calculer les coordonnées du point d'inflexion du graphe de f_k en fonction de k, et montrer qu'il n'existe aucun point de la courbe avec une tangente horizontale ; (2,5 P.)

(c) Dessiner le graphe de la fonction f_k pour $k = 4$ en considérant les résultats précédents (zéros, domaine de définition et point d'inflexion) ; (1 P.)

(d) La révolution (rotation) du graphe de f_4 autour de l'axe-x, limité à droite par l'abscisse x du point d'inflexion, engendre une coupelle (*Schale*) ouverte, tournée de 90°.

Calculer le volume de cette coupelle en cm^3, l'unité correspondant à une longueur de 5 cm ; (2,5 P.)

Remarque : si les coordonnées du point d'inflexion n'ont pas pu être calculées, utiliser l'abscisse $x_I = \ln(8)$.

(e) Soit la courbe engendrée par l'ensemble des points $P\left(\ln(2k) \,\middle|\, \sqrt{k}\right)$ (en faisant varier $k > 0$). Déterminer une équation de la fonction correspondant à cette courbe. (2 P.)

4. Combinatoire et probabilité

Une équipe de chercheurs souhaite étudier la capacité de concentration que des étudiants peuvent avoir pendant un examen. Pour ce faire, un échantillon de personnes est dérangé (*gestört*) pendant la résolution d'un exercice de concentration, et ce de façon ciblée et répétée.

Pour la première expérience, 12 femmes et 8 hommes se sont présentées. Le groupe pilote ne doit cependant être composé que de 6 personnes.

(a) Combien de possibilités les chercheurs ont-ils quand :

  (i) Le groupe pilote doit être composé de 3 femmes et 3 hommes ? (1 P.)

  (ii) Au moins deux femmes et au moins deux hommes doivent être présents dans le groupe pilote ? (1 P.)

Il s'avère que les femmes répondent correctement aux questions avec une probabilité de 60 %, contre 50 % pour les hommes.

(b) Une femme doit résoudre 10 exercices de concentration.

  (i) Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement 8 bonnes réponses ? (1 P.)

  (ii) Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 8 bonnes réponses ? (2 P.)

(c) Combien d'exercices, au minimum, une femme devrait-elle résoudre pour avoir au moins 4 bonnes réponses avec une probabilité minimale de 95 % ? (2 P.)

(d) Le groupe pilote est finalement constitué de 4 femmes et 2 hommes.

  (i) Quelle est la probabilité qu'une personne du groupe réponde correctement à une question ? (1,5 P.)

  (ii) Une personne du groupe a répondu correctement à une question. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une femme ? (1,5 P.)

5. Exercices courts

Cette partie comprend deux exercices (a) et (b) indépendants l'un de l'autre.

(a) Soient les deux sphères

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &: (x-3)^2+(y+9)^2+(z-8)^2=144\\ \Sigma_2 &: x^2+y^2+z^2+22x+8y-20z+156=0\end{aligned}$$

(i) Calculer les coordonnées des centres C_1 et C_2 des deux sphères, puis montrer que les deux sphères s'interceptent (se coupent) ; (2 P.)

(ii) L'intersection des deux sphères Σ_1 et Σ_2 est le cercle c. Montrer que le point $P\,(-5\,|\,-1\,|\,4)$ appartient au cercle c ; (1 P.)

(iii) Déterminer une équation du plan Π qui contient le cercle c, ainsi que le rayon du cercle c. (2,5 P.)

(b) Afin de réaliser un verre (*Glas*), un ingénieur utilise la fonction f suivante :

$$f(x)=\frac{1}{8}\cdot x^{1,4}+1,8.$$

Cette fonction correspond au bord du verre (couché). Le volume intérieur du verre est déterminé par la révolution (la rotation) autour de l'axe-x du domaine limité par la fonction f, l'axe-x et les verticales d'équations $x=0$ et $x=9$.

(i) Faire un schéma de la fonction f et du verre sur un système de coordonnées puis calculer son volume intérieur, au ml près, l'unité étant le centimètre ; (1,5 P.)

(ii) L'ingénieur doit apposer (ajouter) une marque sur le verre indiquant la contenance de 15 cl. A quelle hauteur doit-il placer cette marque ? Dessiner la marque sur le schéma précédent ; (1 P.)

(iii) En réalité, la fonction f ne correspond qu'à la surface externe du verre. La surface interne est déterminée de la même façon avec la fonction g :

$$g(x)=(x-0,5)^{0,2}\cdot e^{\frac{x}{10}}+0,5.$$

Calculer la masse du verre (vide) en grammes, sachant que sa masse volumique est de 2,5 g/cm^3. (2 P.)