

Maturitätsprüfungen 2010 – Mathematik schriftlich

Klassen: (4GL), 4I, (4LW), 4MS, 4Sb, 4W, 4WZ, 5KSW (Bt, Dm, Fg, Kü, Lf, Sk, We, Zm)

Prüfungsdauer: 4h

Hilfsmittel: CAS-Taschenrechner (TI-89/Voyage 200, im Auslieferungszustand)

Taschenrechnerhandbuch (keine Notizen darin)

Formelsammlung Fundamentum (ohne Notizen darin)

Punkteverteilung:

1	2	3	4a	4b	5	Total
12	12	12	5	7	12	60

Aufgabe 1 - Analysis

Betrachten Sie die Funktionenschar $f_k(x) = \frac{x^4 + k}{x^2}$ mit dem Parameter $k \neq 0$.

- (a) Überprüfen Sie die Graphen von f_k auf Achsen- und Punktsymmetrie. (1 P.)
- (b) Geben Sie die Pole der Graphen der Funktionen an. (1 P.)
- (c) Welcher Funktion nähert sich die Schar $f_k(x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$ an (asymptotisches Verhalten)? (1 P.)
- (d) Für welche Parameterwerte existieren Nullstellen? Geben Sie die Nullstellen an. (1 P.)
- (e) Bestimmen Sie die Extrempunkte und geben Sie an, für welche Parameterwerte solche existieren. Für die volle Punktzahl muss diese Teilaufgabe von Hand gerechnet werden. (4 P.)
- (f) Bestimmen Sie k so, dass der Wendepunkt die Koordinaten $(3|y_W)$ hat. Wie gross ist y_W ? (2 P.)
- (g) Betrachten Sie die Kurven, welche zu den beiden Parameterwerten $k = 1$ und $k = -1$ gehören. Berechnen Sie für $x > 0$ den Inhalt der Fläche zwischen diesen Kurven von der Extrempunktstelle der einen bis zur Wendestelle der anderen Kurve. (2 P.)

Aufgabe 2 - Geometrie

Gegeben sind die Punkte $A(-2|8|0)$, $B(0|0|-2)$, $C(1|2|0)$ und $D(0|6|1)$.

- (a) Zeigen Sie, dass die vier Punkte A, B, C und D ein gleichschenkliges Trapez bilden. (2 P.)
- (b) Berechnen Sie die Koordinatenform der Ebene $\varepsilon(ABCD)$. (1.5 P.)
- (c) Berechnen Sie die Koordinaten des Diagonalschnittpunktes M des Trapezes $ABCD$. Für die volle Punktzahl muss diese Teilaufgabe von Hand gelöst werden. (2 P.)
- (d) Bestimmen Sie die Innenwinkel des Trapezes $ABCD$. (1.5 P.)
- (e) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$. (2 P.)

Das gleichschenklige Trapez $ABCD$ bildet zusammen mit dem Punkt S eine Pyramide. S liegt auf der Geraden g , die durch den Punkt $P(0|4|0) \in \varepsilon$ verläuft und senkrecht steht zur Ebene ε . Die Höhe der Pyramide beträgt 15 Längeneinheiten. S und der Koordinatenursprung liegen auf verschiedenen Seiten von ε .

(Wenn Sie die Gleichung der Ebene ε von Teilaufgabe (b) nicht herleiten konnten, verwenden Sie $\varepsilon : -2x - y + 2z + 4 = 0$.)

- (f) Berechnen Sie die Koordinaten der Pyramidenspitze S . (3 P.)

Aufgabe 3 - Wahrscheinlichkeitsrechnung

Während der jüngsten Schweinegrippe-Epidemie (H1N1-Virus) wurden 100 Leute, von denen 20 mit dem Virus infiziert waren, mit einem neuartigen Test auf das H1N1-Virus getestet. Die folgende Tabelle enthält einen Teil der Testergebnisse:

	H1N1-infiziert	H1N1-frei	Total
Testergebnis positiv	19	A	B
Testergebnis negativ	C	78	D
Total	20	E	100

- (a) Berechnen Sie die fehlenden Werte A, B, C, D und E . (1 P.)
- (b) Eine Person der Stichprobe wird zufällig ausgewählt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Virustest bei dieser Person positiv ausfällt? (1 P.)
- (c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person das Virus nicht hat und der Test positiv ausfällt? (1 P.)
- (d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine vom Virus infizierte Person dennoch ein negatives Testresultat erhält? (1 P.)

Von den 80 gesunden (nicht mit H1N1 infizierten) Probanden sind 50 männlich.

- (e) Auf wie viele Arten können die Forscher aus den 80 Gesunden eine Gruppe von 30 Personen auswählen? (1 P.)
- (f) Wie viele Möglichkeiten haben sie, wenn genau die Hälfte der 30 Personen Frauen sein müssen? (1.5 P.)
- (g) Angenommen, die Forscher hätten eine Gruppe von 15 Männern und 15 Frauen ausgewählt. Auf wie viele Arten könnten sie aus diesen 30 Personen drei Teilgruppen bilden, die aus je 5 Männern und 5 Frauen bestehen, um an ihnen drei verschiedene Impfstoffe zu testen? (2 P.)

Die Forscher gingen davon aus, dass das Virus in der Bevölkerung zufällig verteilt ist und 0.01% der Bevölkerung mit dem H1N1-Virus infiziert ist.

- (h) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Schulklasse von 24 Schülerinnen und Schülern genau zwei das Virus in sich tragen? (1.5 P.)
- (i) Wie viele Personen müsste man mindestens aussuchen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens jemand mit dem H1N1-Virus dabei wäre? (2 P.)

Aufgabe 4a - Extremalproblem

Ein Rechteck mit den Abmessungen x und y ist gegeben. Durch Rotation des Rechtecks um eine Seite y entsteht ein Zylinder.

- (a) Fertigen Sie eine saubere Skizze der Situation an. (1 P.)
- (b) Der Umfang des Rechtecks ist 18 cm. Berechnen Sie den Inhalt des Zylindervolumens V in Abhängigkeit von x . (1 P.)
- (c) Welches ist der sinnvolle Definitionsbereich von $V(x)$? (1 P.)
- (d) Berechnen Sie die Abmessungen x und y des Zylinders mit grösstem Volumen. Für die volle Punktzahl muss diese Teilaufgabe von Hand gerechnet werden. (2 P.)
(Wenn Sie die Gleichung für den Volumeninhalt von Teilaufgabe (b) nicht berechnen konnten, verwenden Sie für das Volumen $V(x) = \pi \cdot (12x^2 - x^3)$.)

Aufgabe 4b - Exponentielles Wachstum

Ein Adenokarzinom der Brust ist ein schnellwachsender Krebs. Sei $N(t) = 100 \cdot 2^{t/3}$ die Gleichung, die die Anzahl Krebszellen dieses Karzinoms beschreibt, wobei t die Zeit in Monaten ist.

- (a) Wie viele Krebszellen gibt es zum Zeitpunkt $t = 0$? (0.5 P.)
- (b) Wie lange dauert es, bis sich die Anzahl der Krebszellen verdoppelt hat? (1 P.)
- (c) Um einen annähernd kugelförmigen Tumor klinisch feststellen zu können, muss dieser mindestens 1 cm Durchmesser haben, was ungefähr 10^9 Krebszellen entspricht. Ab welchem Zeitpunkt kann der Krebs festgestellt werden? (0.5 P.)
- (d) Nach sieben Jahren stellt man bei einer Person einen Tumor fest. Wie gross ist der Durchmesser des Tumors zu diesem Zeitpunkt? (1.5 P.)
- (e) Die Behandlung der Person von Aufgabe (d) beginnt einen Monat nach der Entdeckung der Krankheit. Wie gross ist die momentane Wachstumsrate des Tumors (Anzahl Zellen pro Monat) zu Beginn der Behandlung? (1 P.)
- (f) Diese Behandlung hat 99.9% der Krebszellen zerstört. Wie lange dauert es, bis die überlebenden Krebszellen sich wieder soweit vermehrt haben, dass erneut ein Tumor festgestellt werden kann? Für die volle Punktzahl muss diese Teilaufgabe von Hand gelöst werden. (2.5 P.)