

## Maturitätsprüfungen 2010 – Mathematik schriftlich

### Klasse 4Ba

- 
- Bemerkungen: Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden.  
Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt!
- Hilfsmittel: Die von Ihrem Lehrer bewilligten Taschenrechner und Formelsammlungen.  
Der Rechner muss im Auslieferungszustand sein.  
Sie dürfen Ihr Taschenrechnerhandbuch benutzen (keine Notizen darin!).

Punkteverteilung:

1	2	3	4	5	Total
12	12	12	12	12	60

---

### Aufgabe 1

Durch die Gleichung

$$f_k(x) = \frac{x^2 - 2x + k}{2x - 4}$$

mit dem Parameter  $k \in \mathbb{R}$  ist eine Funktionenschar gegeben. Die Graphen dieser Schar seien mit  $G_k$  bezeichnet.

- a) Bestimmen Sie die Pole und Asymptoten aller Funktionen  $f_k$ . Beschreiben Sie die Lage der Asymptoten der Graphen  $G_k$ . Gibt es einen Sonderfall? (4 P.)
- b) Bestimmen Sie alle  $k$ -Werte, bei denen der zugehörige Graph  $G_k$  die  $x$ -Achse niemals schneidet. (1 P.)
- c) Bestimmen Sie die Anzahl und die Art der lokalen Extrempunkte von  $G_k$  in Abhängigkeit von  $k$ . (3 P.)
- d) Der Graph von  $f_{-3}$  schliesst im II. Quadranten des Koordinatensystems mit den beiden Koordinatenachsen eine Fläche ein. Berechnen Sie den exakten Inhalt dieser Fläche, ohne den TR zu benützen. (2 P.)
- e) Eine neue Funktionenschar  $h_k$  sei definiert durch  $h_k(x) = f_k(x) - f_0(x)$  mit  $k > 0$ . Der Graph von  $h_k$ , die  $x$ -Achse und die Gerade  $x = 1$  begrenzen eine Fläche. Rotiert diese Fläche um die  $x$ -Achse, entsteht ein Rotationskörper.  
Gibt es einen Wert von  $k$ , so dass das Volumen dieses Rotationskörpers  $2\pi$  Volumeneinheiten gross ist? (2 P.)

## Aufgabe 2

Gegeben sind zwei Geraden  $g_1$  und  $g_2$  und eine Kugel  $K$  mit dem Radius  $R = 3 \cdot \sqrt{26}$ .

$$g_1: \vec{r} = \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 83 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix} \quad g_2: \vec{r} = \begin{pmatrix} -12 \\ -21 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- a) Beweisen Sie, ohne den Taschenrechner zu benutzen, dass sich  $g_1$  und  $g_2$  im Punkt  $S(0|0|13)$  schneiden. (2 P.)
- b) Berechnen Sie, ohne den Taschenrechner zu benutzen, den Kosinus des spitzen Winkels  $\alpha$ , den  $g_1$  und  $g_2$  einschliessen. (1 P.)
- c) Die Kugel  $K$  mit dem gegebenen Radius  $R$  soll beide Geraden  $g_1$  und  $g_2$  in ihrem Schnittpunkt  $S$  berühren. Berechnen Sie die möglichen Mittelpunkte der Kugel. (3 P.)
- d) Wenn der Punkt  $M(13|25|44)$  der Mittelpunkt der Kugel  $K$  ist, sind  $g_1$  und  $g_2$  Tangenten an diese Kugel. Beweisen Sie das für eine der beiden Geraden  $g_1$  oder  $g_2$ .  
Zeigen Sie auch, dass  $M$  in der von  $g_1$  und  $g_2$  aufgespannten Ebene liegt. (3 P.)
- e) In der in d) beschriebenen Situation sei  $K$  die Inkugel eines geraden Kreiskegels mit der Spitze  $S = g_1 \cap g_2$ . Welche Bedeutung hat der in b) berechnete Winkel  $\alpha$  für diesen Kegel?  
Beweisen Sie, dass eine der Ebenen mit der Gleichung  $13x + 25y + 31z + D = 0$  den Grundkreis dieses Kegels enthält. Für welchen Wert von  $D$  ist dies der Fall? (3 P.)

## Aufgabe 3

Durch die Gleichung  $y = f_a(x) = (x+a) \cdot e^{-x}$ , in welcher der Parameter  $a$  nur positive Werte annehmen soll, ist eine Kurvenschar gegeben.

- a) Berechnen Sie für  $a = 3$  die Schnittpunkte der Kurve mit den Koordinatenachsen, ohne den Taschenrechner zu benutzen und berechnen Sie die Gleichung der Tangente im Schnittpunkt der Kurve mit der  $x$ -Achse. (2 P.)
- b) Auf welcher Kurve liegen die Extrempunkte der Kurven der Schar? (2 P.)
- c) Berechnen Sie  $a$  so, dass die Wendetangente der Kurven der Schar durch den Ursprung geht. (3 P.)
- d) Zeigen Sie, ohne den Taschenrechner zu benutzen, dass  $F_a(x) = (-x - a - 1) \cdot e^{-x}$  eine Stammfunktion von  $f_a(x)$  ist. (2 P.)
- e) Jede Kurve der Schar schliesst mit den Achsen des Koordinatensystems im ersten und zweiten Quadranten je eine Fläche ein.  
Beschreiben Sie, wie sich die jeweiligen Flächeninhalte mit zunehmendem  $a$  verändern und vergleichen Sie die beiden Wachstumsprozesse.  
Untersuchen Sie, ob es einen Wert von  $a$  gibt, so dass die beiden Flächen gleichen Inhalt haben. (3 P.)

## Aufgabe 4

Petra spielt mit Ihren 7 Kameradinnen in einem Volleyball-Team. Patrick, der Freund von Petra, spielt Fussball mit seinen Kollegen in einer Freizeitliga. Petra und Patrick laden Ihre Sportkollegen zu einem gemeinsamen "Spielabend" ein.

- a) Als die geladenen Gäste von Petra und Patrick eingetroffen sind, begrüßen sich alle Anwesenden mit einem Fruchtcocktail, indem jeder mit jedem genau einmal anstösst. Insgesamt hört man dabei die Gläser 190-mal klingen. Begründen Sie, dass insgesamt 20 Personen an diesem Abend zusammengekommen sind. (1 P.)
- b) Zunächst spielen alle Anwesenden ein Spiel, bei dem der Erstplatzierte ein Buch, der Zweite einen Kugelschreiber und der dritte Platz eine Tafel Schokolade gewinnen kann. Auf wie viele Arten können die Preise auf die Anwesenden verteilt werden? (1 P.)
- c) Für das nächste Spiel soll eine Gruppe aus 2 Volleyballerinnen und 3 Fussballern gebildet werden. Auf wie viele Arten ist dies möglich? (1.5 P.)

Zum Schluss können die Gäste an dem folgenden Glücksspiel teilnehmen: Zwei Würfel werden geworfen und die Summe der Augenzahlen wird betrachtet. Der Bankhalter zahlt dem Spieler für die Augensumme 2 oder 12 das Zehnfache der geworfenen Augensumme in Rappen, für die Augensumme 3 oder 11 das Fünffache der Augensumme, für die Augensumme 4 oder 10 das Doppelte der Augensumme und in allen anderen Fällen die einfache Augensumme in Rappen.

- d) Sei die Zufallsgrösse  $X$  die Auszahlung in Rappen bei diesem Glücksspiel. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $X$  an und berechnen Sie, welcher Einsatz das Würfelspiel zu einem fairen Spiel machen würde. (3.5 P.)
- e) Jonas spielt das Spiel und bekommt 20 Rappen ausbezahlt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde ein Pasch gewürfelt (zwei gleiche Augenzahlen)? (1 P.)
- f) Die Bank verlangt als Einsatz 15 Rappen. Karin nimmt am Spiel teil. Sie wertet es als Erfolg, wenn Sie bei einer Spielrunde mehr ausbezahlt bekommt als Sie einzahlen musste. Wie gross ist die Erfolgswahrscheinlichkeit von Karin in einem einzelnen Spiel? (1 P.)
- g) Falls Sie die vorige Aufgabe nicht lösen konnten, nehmen Sie eine sinnvolle Erfolgswahrscheinlichkeit selbst an.  
Karin spielt das Spiel 20 Mal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Karin dabei mindestens 10 Erfolge? (1 P.)
- h) Geben Sie ein Intervall an, in dem mit ca. 95% Sicherheit die Anzahl der Erfolge von Karin liegt, wenn sie das Spiel 40 Mal spielt. (2 P.)

## Aufgabe 5

Die folgenden Teilaufgaben sind voneinander unabhängig!

- a) Einem Halbkreis mit gegebenem Radius  $R$  können gleichschenklige Dreiecke derart einbeschrieben werden, dass ihre Symmetrieachse mit derjenigen des Halbkreises und ihre Spitze mit seinem Zentrum zusammenfällt.

Von welcher Art ist das derart einbeschriebene Dreieck mit maximalem Flächeninhalt?

Rotiert die oben beschriebene Figur um ihre Symmetrieachse, so entsteht eine Halbkugel mit einbeschriebenem Kegel. Zeigen Sie, dass das grösstmögliche Volumen eines solchen Kegels weniger als 20% des Volumens der Halbkugel ausmacht. (6 P.)

- b) Wir betrachten die Kurve mit der Gleichung  $y = \sqrt{x}$  auf einem Intervall  $[0; b]$ , ( $b > 0$ ). Wir unterteilen das Intervall  $[0; b]$  in unendlich viele Teilintervalle, wobei die Teilpunkte die Koordinaten  $q^2b$ ,  $q^4b$ ,  $q^6b$ ,  $q^8b$ , ... haben sollen;  $q$  ist dabei irgend eine positive Zahl, aber kleiner als 1.

Anschliessend bilden wir die Summe

$$S(q) = (b - q^2b) \cdot \sqrt{q^2b} + (q^2b - q^4b) \cdot \sqrt{q^4b} + (q^4b - q^6b) \cdot \sqrt{q^6b} + (q^6b - q^8b) \sqrt{q^8b} + \dots$$

Illustrieren Sie  $S(q)$  auf dem Beilageblatt für die Werte  $b = 25$  und  $q = 0.6$  bzw.  $q = 0.8$ .

Welche geometrische Bedeutung hat  $S(q)$ ?

$S(q)$  lässt sich in folgende Form bringen:

$$S(q) = b \cdot \sqrt{b} \cdot q \cdot (1 - q^2) \cdot (1 + q^3 + q^6 + q^9 + q^{12} + \dots).$$

Dies müssen Sie nicht nachweisen. Berechnen Sie nun  $\lim_{q \rightarrow 1} S(q)$ ,  $0 < q < 1$  bleibt vorausgesetzt!

Dokumentieren Sie den Taschenrechnereinsatz! Welche geometrische Bedeutung hat dieser Grenzwert? Wie können Sie damit Ihre Resultat bestätigen? (6 P.)

Viel Erfolg wünschen Ihnen Dennis Krüger, Heinz Gertsch und Christian Freiburghaus