

Question 5 – Trigonometry

The transmission mast of Radio Alpha is located at point $A(13|25)$. Point $B(5|10)$ lies on the circle C_1 centre A which encloses the area of good reception of Radio Alpha.

- (a) Show that the radius of circle C_1 is 17 and give an equation for the circle. (1.5 P.)

(If you have no equation for C_1 use $x^2 + y^2 - 26x - 50y + 505 = 0$ where necessary for the rest of this question)

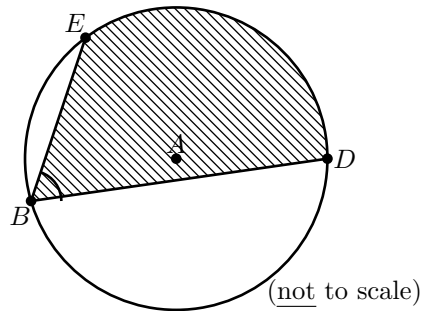
A line joining point B with point D on circle C_1 has equation $23y - 7x - 195 = 0$.

- (b) Show that the coordinate of point D is $(28|17)$. (1.5 P.)

Very good reception is obtained in a region within the circle C_1 enclosed by the line joining $B(5|10)$ and $D(28|17)$ and a line joining points B and $E(13|42)$ as shown by the shaded area in the figure.

Calculate

- (c) the angle $\angle DBE$. (1 P.)
 (d) the length of arc ED (1.5 P.)
 (e) the area of the shaded region. (2.5 P.)



Programmes from another radio station Radio Gamma have good reception in a region enclosed by a sphere S with equation: $x^2 + y^2 + z^2 - 2\sqrt{21}z - 100 = 0$.

- (f) Find the coordinate of the centre, and the radius of the sphere S . (1.5 P.)
 (g) Does sphere S intersect the circle C_1 ? If so, find a point of intersection, if not, find the shortest distance on the $x - y$ plane between the sphere S and the circle C_1 . (2.5 P.)

Aufgabe 5a – Trigonometrie (Halbaufgabe)

Das Feld oberhalb des Gymnasiums wurde vor einiger Zeit vermessen. Die Entfernungen zwischen den Punkten A, B, C, D und E betragen nach Google Earth $\overline{AB} = 131m$, $\overline{BC} = 237m$, $\overline{CD} = 52m$, $\overline{DE} = 152m$ und $\overline{EA} = 90m$. Die Winkel bei A und B dürfen als rechte Winkel angenommen werden, obwohl dies nicht ganz genau stimmt. Die anderen Winkel sind keine rechten. Die Neigung des Geländes muss nicht berücksichtigt werden.

- (a) Berechnen Sie die Länge der Strecke \overline{CE} und den Winkel bei D . (2 P.)
- (b) Was ist das Grundstück wert, wenn pro m^2 CHF 480 gerechnet werden? (2 P.)

Die nächste Teilaufgabe ist unabhängig von (a) und (b).

- (c) Gegeben ist das Dreieck ABC mit $\alpha = 40^\circ$, $a = 6$ und $c = 8$. Berechnen Sie den Winkel γ und begründen Sie geometrisch, weshalb es zwei verschiedene Lösungen gibt. (2 P.)



Aufgabe 5b – Stochastik (Halbaufgabe)

Eine Urne enthält sechs weisse und vier schwarze Kugeln. Mit einem Griff werden der Urne vier Kugeln entnommen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit,

- (a) dass es genau vier weisse Kugeln sind, (1 P.)
- (b) dass es mehr weisse als schwarze Kugeln sind. (2 P.)

Die erste Urne enthalte wiederum sechs weisse und vier schwarze Kugeln.

In einer zweiten Urne hat es ebenfalls weisse und schwarze Kugeln. Aus beiden Urnen wird je eine Kugel gezogen. Die Wahrscheinlichkeit, je eine weisse zu ziehen, beträgt $7/20$. Legt man vor dem Ziehen dieser beiden Kugeln drei weisse Kugeln aus der ersten Urne in die zweite, ist die Wahrscheinlichkeit, zwei weisse Kugeln zu ziehen, $2/7$.

- (c) Wie viele weisse und schwarze Kugeln enthält die zweite Urne ursprünglich? (3 P.)

Question 5a – Circles

- (a) The two circles $C_1 : (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 16$ and $C_2 : x^2 + y^2 - k \cdot x - 8y - 4k = 0$ have the same centre point. Calculate the radius of circle C_2 . (1 P.)
- (b) A third circle $C_3 : (x - 19)^2 + (y - 16)^2 = 256$ is given. Find a Cartesian equation for the straight line that passes through the centre of circle C_1 and the centre of C_3 and show that these two circles touch each other at only one point. (1 P.)
- (c) Find the centre point, C , and radius, r , of the **smallest** circle that could contain the two circles, C_1 and C_3 . (3 P.)

Question 5b – Hypothesis Testing/Quality Control Analysis

A farmer's record of his 2009 apple crop shows that the percentages of "small", "medium" and "large" apples were 19, 36 and 45, respectively.

After a quality-control check, he found that one-third of his "small" apples, one-quarter of his "medium" apples and one-fifth of his "large" apples had blemished skins.

- (a) Calculate the probability that a randomly chosen apple from the 2009 crop does not have a blemished skin. (1.5 P.)
- (b) If, in fact, this randomly chosen apple does have a blemished skin, what is the probability that it is a "small" apple? (1 P.)

In 2010 – before any quality controls have been made – he takes a random sample of 100 apples from the new crop, and finds that it contains only 12 "small" apples.

- (c) How confident would he be that this year's crop (2010) contains the same percentage of "small" apples as in the previous year? Should he change his opinion? (2.5 P.)
- (d) How many "large" apples would this sample need to contain in order that the farmer will be reasonably confident that the percentage of "large" apples this year will be higher than in 2009?

Note: This particular farmer is only prepared to change his mind when the evidence has a smaller than 5% likelihood of matching his current opinion. (2 P.)

Aufgabe 5a – Menge aller Teilmengen (Halbaufgabe)

Corinne möchte sich über verschiedene Studienorte genauer informieren. Wenn Sie aus zwei Orten $\{\text{Amsterdam, Berlin}\}$ auswählen kann, hat sie 4 Möglichkeiten, nämlich als Mengen geschrieben $\{A\}$, $\{B\}$, $\{A,B\}$ und $\{\}$ (man beachte, dass $\{A,B\}$ und $\{B,A\}$ dasselbe ist).

- (a) Zählen Sie in der Mengenschreibweise alle Möglichkeiten auf, wenn Corinne aus 3 Städten $\{\text{Amsterdam, Berlin, Chicago}\}$ wählen kann. (1 P.)
- (b) Zählen Sie in der Mengenschreibweise alle Möglichkeiten auf, wenn Corinne aus 4 Städten $\{\text{Amsterdam, Berlin, Chicago, Dijon}\}$ wählen kann. (1 P.)
- (c) Finden Sie eine sehr kurze Formel (ohne Binomialkoeffizienten), mit der Sie die Anzahl Möglichkeiten berechnen können, wenn aus $n(n \in \mathbb{N})$ Städten gewählt werden kann. Begründen Sie in 1-2 deutschen Sätzen, wieso diese Formel funktioniert. (2 P.)
- (d) Im Mathematikunterricht haben Sie Binomialkoeffizienten kennen gelernt. Finden Sie eine zweite Formel, die aus solchen besteht und mit der man die Anzahl der oben beschriebenen Möglichkeiten ebenfalls berechnen kann. (1.5 P.)
- (e) Kombinieren Sie die beiden Formeln aus (c) und (d), und Sie erhalten eine interessante mathematische Formel (0.5 P.)

Aufgabe 5b – Trigonometrie (Halbaufgabe)

Das Feld oberhalb des Gymnasiums wurde vor einiger Zeit vermessen. Die Entfernungen zwischen den Punkten A, B, C, D und E betragen nach Google Earth $\overline{AB} = 131m$, $\overline{BC} = 237m$, $\overline{CD} = 52m$, $\overline{DE} = 152m$ und $\overline{EA} = 90m$. Die Winkel bei A und B dürfen als rechte Winkel angenommen werden, obwohl dies nicht ganz genau stimmt. Die anderen Winkel sind keine rechten. Die Neigung des Geländes muss nicht berücksichtigt werden.

- (a) Berechnen Sie die Länge der Strecke \overline{CE} und den Winkel bei D . (2 P.)
- (b) Was ist das Grundstück wert, wenn pro m^2 CHF 480 gerechnet werden? (2 P.)

Die nächste Teilaufgabe ist unabhängig von (a) und (b).

- (c) Gegeben ist das Dreieck ABC mit $\alpha = 40^\circ$, $a = 6$ und $c = 8$. Berechnen Sie den Winkel γ und begründen Sie geometrisch, weshalb es zwei verschiedene Lösungen gibt. (2 P.)



5 – Exercices courts

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

- (a) Trouver l'expression fonctionnelle $f(x)$ de la fonction polynomiale de degré 4 vérifiant les deux conditions suivantes : (4 P.)

- (i) -1 est le minimum global de la fonction f en $x = 2$;
- (ii) $(0|1)$ est un point selle du graphe de f .

- (b) Soient trois droites définies ci-dessous : (4 P.)

- (i) d_1 est l'intersection des plans $\Pi_1 : 2x + 2y - z - 6 = 0$ et $\Pi_2 : 4x + y + z - 3 = 0$.

(ii) $d_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$

(iii) $d_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$

Parmi ces trois droites, deux sont non-coplanaires. Calculer à 0,01 près la distance entre ces deux droites.

- (c) Un joueur possède deux dés (*Würfel*). Un dé est équilibré. Le second dé est truqué : le chiffre 6 apparaît avec la probabilité $1/2$ et les autres chiffres apparaissent tous avec la même probabilité.

- (i) Un dé est tiré au hasard et lancé deux fois de suite. On obtient deux 6. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse du dé truqué ?
- (ii) Si le dé est effectivement le dé truqué, quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 10 en lançant deux fois le dé ?

Aufgabe 5a – Exponentialfunktion

Für die volle Punktzahl muss diese Aufgabe von Hand gelöst werden.

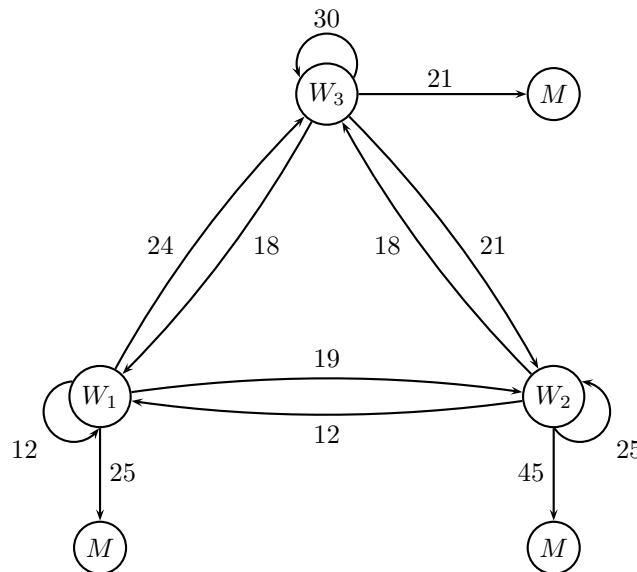
Gegeben ist die Kurvenschar mit der Funktionsgleichung $f_{a,b}(x) = (x - a)e^{-bx}$.

Wie sind die Parameter a und b zu wählen, damit die entsprechende Kurve der Schar an der Stelle $x = -3$ eine Nullstelle und an der Stelle $x = -1$ eine horizontale Tangente hat? (4 P.)

Aufgabe 5b – Innerbetriebliche Verflechtungen – Das Leontief-Modell

Die drei Werke W_1 , W_2 und W_3 eines Unternehmens beliefern sich gegenseitig, ein Teil der Produktion wird direkt an den Markt M geliefert und ein Teil wird jeweils im Werk selbst verarbeitet.

Die Materialflüsse in der aktuellen Produktionsphase sind im folgenden Gozintographen dargestellt:



(a) Füllen Sie die folgende Tabelle aus: (2 P.)

		empfangender Sektor			Endnachfrage	Gesamtproduktion
		W_1	W_2	W_3		
liefernder Sektor	W_1					
	W_2					
	W_3					

(b) Berechnen Sie die Produktionsmatrix A . (2 P.)

(c) Wie wird die sogenannte *Leontief-Inverse* berechnet? (1 P.)

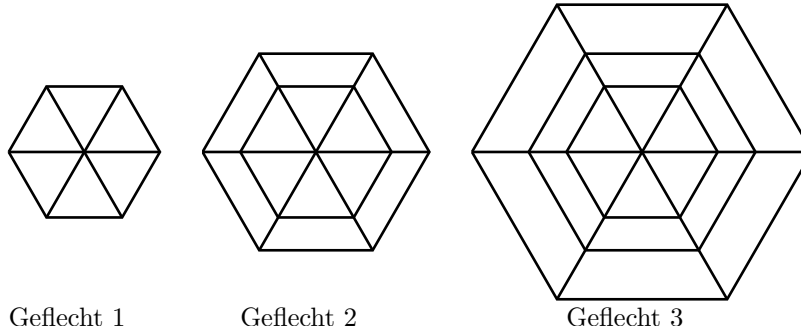
(d) Wie lautet die Leontief-Inverse im vorliegenden Beispiel? (1 P.)

(e) In welcher Beziehung stehen Leontief-Inverse, Produktions- und Nachfragevektor? (1 P.)

(f) Überprüfen Sie (e) mit den vorliegenden Daten. (1 P.)

Aufgabe 5 – Folgen und Reihen

- (a) Die Zahlen 9, 31, 65, 111 bilden eine arithmetische Folge zweiter Ordnung.
- (i) Geben Sie das Bildungsgesetz an. (3 P.)
- (ii) Berechnen Sie die Summe s_n der ersten n Glieder. (3 P.)
- (b) Die in der folgenden Graphik dargestellten Drahtgeflechte bestehen aus regulären konzentrischen Sechsecken und deren Verbindungen. Das Sechseck des ersten Drahtgeflechts und das kleinste Sechseck der folgenden Drahtgeflechte weisen jeweils eine Seitenlänge von 5 mm auf. Nach aussen hin vergrössern sich die Seitenlängen der Sechsecke um den Faktor $\frac{3}{2}$.



- (a) 1. Berechnen Sie für das zweite, dritte und vierte Drahtgeflecht im idealisierten Fall die Gesamtdrahtlängen l_2 , l_3 und l_4 . (1.5 P.)
- (b) Geben Sie allgemein l_n in möglichst einfacher Form an. (2 P.)
- (c) Bestimmen Sie das grösstmögliche n so, dass ein Draht der Länge 10 m gerade noch ausreicht, um das entsprechende Geflecht zu realisieren. (2.5 P.)

Aufgabe 5a – Wahrscheinlichkeit

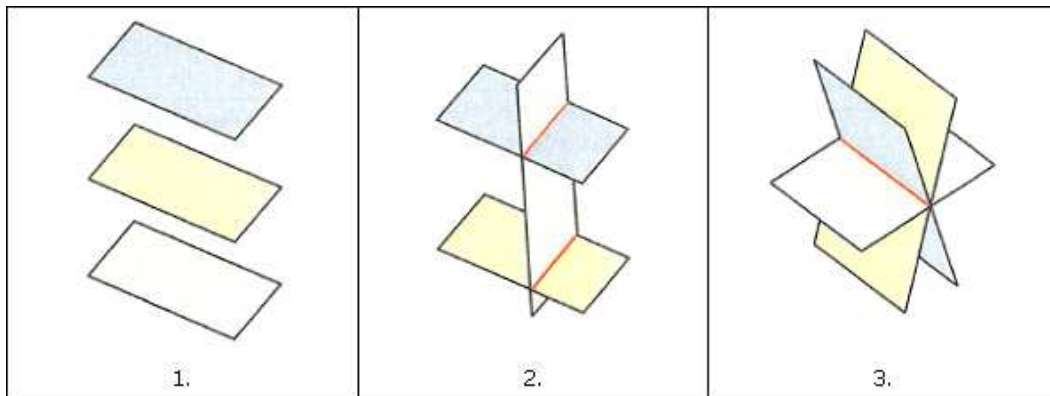
Jonas hat zehn verschiedene Karten, unter denen sich genau ein As befindet. Er bietet Petra an, sich am folgenden Spiel zu beteiligen:

Er mischt gut durch und lässt Petra nacheinander so lange eine Karte ziehen, bis das As erscheint. Geschieht das beim 1., 2., ..., 7. Zug, erhält Petra 7, 6, ..., 1 CHF von Jonas. Kommt das As nach dem 7. Zug, muss Petra Jonas 10 CHF ausbezahlen.

Beurteilen Sie, ob das Spiel fair ist.

Aufgabe 5b – Geometrie

Die Abbildung verdeutlicht drei mögliche Lagen dreier Ebenen E_1, E_2 und E_3 zueinander.



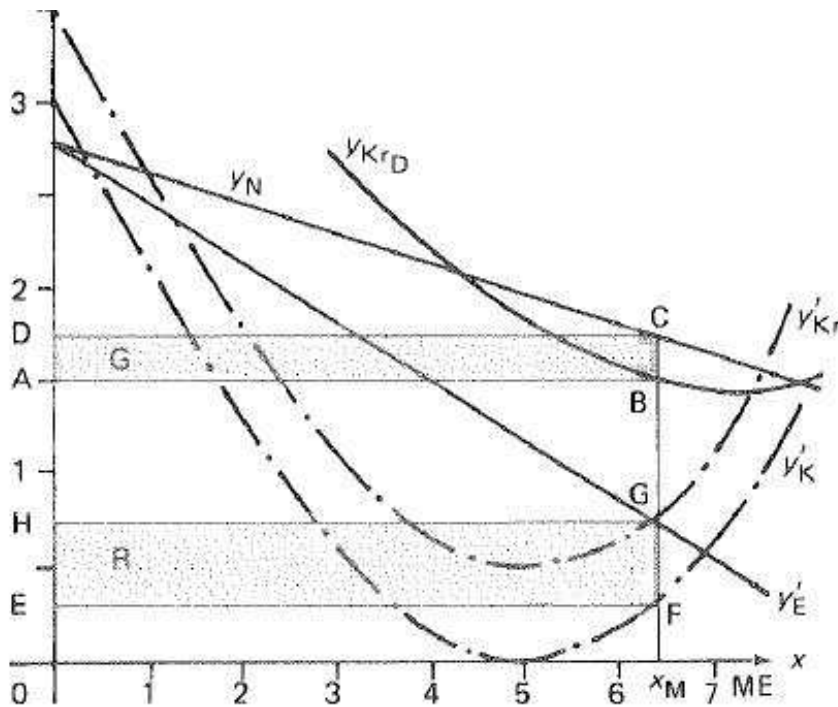
- (a) Geben Sie für jeden der obigen Fälle jeweils ein konkretes Beispiel der Ebenen E_1, E_2 und E_3 an. Dabei sollen für den 1. Fall nur die Normalform, für den 2. Fall nur die Koordinatenform und im 3. Fall nur die Parameterform für die Ebenen E_1, E_2 und E_3 benutzt werden.
- (b) Geben Sie ein Beispiel dreier Ebenen E_1, E_2 und E_3 an, welche sich in genau einem Punkt schneiden.

- (c) Bestimmen Sie die Parameter a, b und c derart, dass für die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot (-1) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ a \\ b \end{pmatrix}$

und die Ebene $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$ gilt: g liegt in E .

Aufgabe 5a

Sie finden in dem Wirtschaftsbericht einer Firma die folgende Abbildung:



Bestimmen Sie mit Hilfe der Grafik die folgenden Werte:

- (a) Den Maximalgewinn des Betriebes, (1 P.)
- (b) die Steuerabgabe für eine Mengeneinheit und (0.5 P.)
- (c) den Mengenbereich, in dem das Unternehmen gewinnbringend produziert. (1 P.)

Aufgabe 5b

Gegeben ist die Nachfragefunktion $y_n(x) = ax + b$ eines Betriebes.

- (a) Geben Sie mit einer kurzen Begründung einen sinnvollen Definitionsbereich für die Parameter a und b an. (1 P.)
- (b) Sei nun $a = -2$ und $b = 6$. Bestimmen Sie die Elastizität ε_N der Nachfrage für 0.5 Mengeneinheiten und interpretieren Sie diesen Wert mit einer kurzen aber präzisen Formulierung. (2 P.)
- (c) Allgemein: Bei welcher Menge der Nachfragefunktion $y_n(x) = ax + b$ ist die Nachfrage gerade fließend? (1.5 P.)
- (d) Angenommen, die Nachfragefunktion eines anderen Unternehmens ergibt sich zu $y_n(x) = -\frac{1}{5}x + 2$. Während die variablen Kosten mit $\frac{1}{4}$ Geldeinheiten pro Mengeneinheit zu berücksichtigen sind, betragen die Fixkosten 1 Geldeinheit.
Wie hoch sollte der Staat (falls möglich) die Steuerrate r für dieses Unternehmen festlegen, damit er ein möglichst hohes Steueraufkommen erzielt? Wie hoch ist die maximale Steuereinnahme bei diesem Unternehmen in diesem Fall? (5 P.)