

Maturitätsprüfungen 2009 – Mathematik schriftlich

Klassen: 4BM (Profil M), (4GL), (4IS), 4IZ, 4S, 4W, 4Wa, 4Wb

Prüfungsdauer: 4 h

Erlaubte Hilfsmittel: CAS-Taschenrechner mit Anleitung.
Formelsammlung.

Bemerkungen: Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
Die Arbeit mit dem Taschenrechner muss dokumentiert sein.
Bei jeder Aufgabe steht die maximale Punktzahl.

Analysis (12 Punkte)

1. Sei $f_k(x) = kx^3 - (k+1)x^2$ die Gleichung einer Kurvenschar mit dem positiven reellen Parameter k .
 - (a) Berechnen Sie von Hand die Nullstellen von $f_k(x)$. (2 P.)
 - (b) Berechnen Sie die Extremal- und Wendepunkte der Kurvenschar. (3 P.)
 - (c) Berechnen Sie von Hand die Werte, gegen welche die Nullstellen und die x -Koordinaten der Extremalpunkte streben, wenn k gegen unendlich geht? (2 P.)
 - (d) Berechnen Sie k so, dass der Graph von f_k und die x -Achse eine Fläche mit dem Inhalt $\frac{27}{8}$ einschliessen. (2 P.)
 - (e) Für welchen Wert von k wird der Inhalt der Fläche von Teilaufgabe (d) extremal? Handelt es sich bei diesem Flächeninhalt um ein Maximum oder um ein Minimum? (3 P.)

Vektorrechnung (12 Punkte)

2. Gegeben sind die Punkte $A(0|5|3)$ und $B(-7|8|3)$ und die Kugel k mit der Gleichung $k: x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 20y + 18z - 72 = 0$.
 - (a) Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts und den Radius der Kugel k . (2 P.)
 - (b) Die Gerade $g = AB$ schneidet k in zwei Punkten. Wie lauten die Gleichungen der Tangentialebenen E_1 und E_2 an k in diesen beiden Punkten? (4 P.)
 - (c) Berechnen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s von E_1 und E_2 . (2 P.)
(Wenn Sie die Gleichungen der Tangentialebenen von Teilaufgabe (b) nicht berechnen konnten, verwenden Sie für diese Teilaufgabe die Ebenen $E_1: 9x + 10y + 13z - 140 = 0$ und $E_2: 3x + 12y + 12z - 68 = 0$.)
 - (d) Schneidet die Kugel k die Mittelnormalebene der Strecke \overline{AB} ? Für die volle Punktzahl muss diese Teilaufgabe von Hand gelöst werden. (4 P.)

Wahrscheinlichkeitsrechnung (12 Punkte)

3. Diese Aufgabe besteht aus zwei voneinander unabhängigen Teilaufgaben.

Ein Gymnasium hat in den 4. Klassen 180 Schülerinnen und Schüler.

(a) Die 180 Schülerinnen und Schüler konnten die drei Schwerpunkte *Sprachen*, *Naturwissenschaften* oder *Wirtschaft* wählen.

30% der Schülerinnen und Schüler wählten *Wirtschaft*, wobei von diesen 24 männlich sind. *Naturwissenschaften* ist der Schwerpunkt von 42 Schülerinnen und Schülern, wobei der Anteil der Schülerinnen gleich gross ist wie derjenige der Schüler. Im Schwerpunkt *Sprachen* ist der Anteil der Schülerinnen 6-mal so hoch wie jener der Schüler.

- i. Erstellen Sie eine Tabelle, die alle Schüleranzahlen enthält, aufgeteilt nach männlich/weiblich bzw. Sprachen/Naturwissenschaften/Wirtschaft. (1.5 P.)
- ii. Die Lösungen dieser Aufgabe müssen jeweils in Form eines *gekürzten* Bruches angegeben werden.

Aus den 180 Schülerinnen und Schülern wird eine Person zufällig ausgewählt. Betrachten Sie die folgenden Ereignisse S , F und W :

- S : die Person hat *Sprache* als Schwerpunkt gewählt,
- F : die Person ist weiblich,
- W : die Person hat *Wirtschaft* als Schwerpunkt gewählt.

A. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(W)$ und $P(S)$. (1 P.)

B. Beschreiben Sie das Ereignis $W \cap F$ und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(W \cap F)$. (1 P.)

C. Berechnen Sie $P(F|W)$. Fassen Sie das Resultat in Worte. (1 P.)

(b) Im Rahmen ihrer Maturarbeit zum Thema *Neue Landwirtschaft*, hat eine Schülerin den 180 Schülerinnen und Schülern u. a. die folgenden zwei Fragen gestellt:

- „Kennen Sie das Konzept des *fairen Handels*?“
- „Können Sie ein Label der Bio-Landwirtschaft angeben?“

$\frac{2}{3}$ der Schülerinnen und Schüler antworteten auf die erste Frage mit „Ja“; von diesen konnten 90 Schülerinnen und Schüler auch ein Label der Bio-Landwirtschaft angeben (z. B. „naturaplan“, „bio engagement“ usw.). 33 Schülerinnen und Schüler von denjenigen, die auf die erste Frage mit „Nein“ geantwortet hatten, konnten ein Label der Bio-Landwirtschaft angeben.

Aus den 180 Schülerinnen und Schülern wird wiederum zufällig eine Person ausgewählt. Betrachten Sie die folgenden Ereignisse B und H :

- B : die Person hat ein Label der Bio-Landwirtschaft angeben können,
- H : die Person kennt den *fairen Handel*.

i. Zeigen Sie, dass $P(B|H) = 0,75$. (0.5 P.)

ii. Erstellen Sie ein Baumdiagramm und beschriften Sie dieses vollständig. (1.5 P.)

iii. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(B \cap H)$ und $P(B \cap \overline{H})$. (1 P.)

- iv. Ein Ergebnis der Maturarbeit ist: „70% der Schülerinnen und Schüler der 4. Klasse können ein Label der Bio-Landwirtschaft angeben“.

Ist diese Behauptung richtig? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 P.)

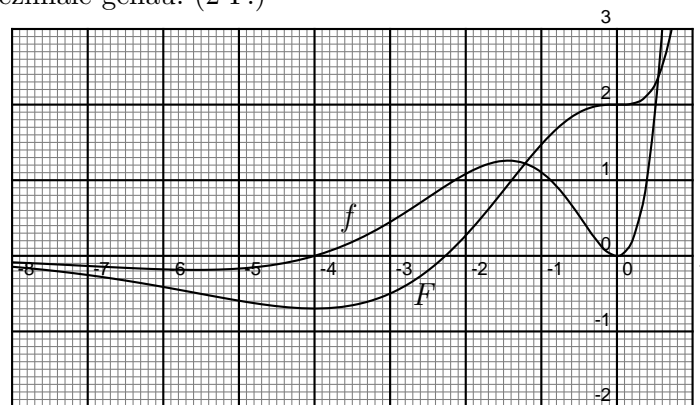
Für die beiden folgenden Teilaufgaben soll die Wahrscheinlichkeit $P(B)$ als konstant angenommen werden, da der Umfang der Stichprobe ($n = 180$) gross ist.

- v. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von sechs befragten Schülerinnen und Schülern (der 4. Klassen) genau vier ein Label der Bio-Landwirtschaft angeben können? (Wenn Sie die vorhergehende Frage nicht beantworten konnten, verwenden Sie $P(B) = 0.7$.) (1.5 P.)
- vi. Wieviele Schülerinnen und Schüler (der 4. Klassen) müssen mindestens befragt werden, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der befragten Personen ein Bio-Label angeben kann, grösser als 99.5% ist? (2 P.)

Analysis (12 Punkte)

4. Die Darstellung zeigt den Graphen einer auf ganz \mathbb{R} definierten, stetigen Funktion f sowie den Graphen einer Stammfunktion F von f . Die Nullstellen von f sind ganzzahlig.

- (a) Der Graph von f und die x -Achse begrenzen im 2. Quadranten ein Flächenstück. Bestimmen Sie von Hand dessen Inhalt mit Hilfe der graphischen Darstellung von F auf eine Dezimale genau. (2 P.)



- (b) f gehört zur Funktionenschar $f_k(x) = (x^3 + kx^2) \cdot e^x$ mit $k \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie k so, dass $f_k(x) = f$ ist. (1.5 P.)
- (c) Zeigen Sie von Hand, dass $F_2(x) = (x^3 - x^2 + 2x - 2) \cdot e^x$ eine Stammfunktion von $f_2(x)$ ist. (1 P.)
- (d) Berechnen Sie von Hand den exakten Flächeninhalt des vom Graphen von $f_2(x)$ und der x -Achse im 2. Quadranten begrenzten Flächenstücks. (1.5 P.)
- (e) Untersuchen Sie den Graphen von $f_k(x)$ an der Stelle $x = 0$ in Abhängigkeit des Parameters k (Tipp: Fallunterscheidung für k). (3 P.)
- (f) Bestimmen Sie den Parameter $k > 0$ so, dass der Graph von $f_k(x)$ mit der x -Achse zwei Flächen mit gleichem Flächeninhalt begrenzt. (3 P.)

Kurzaufgaben (12 Punkte)

5. Diese Aufgabe besteht aus drei voneinander unabhängigen Teilaufgaben.
- (a) Eine Anfangsmenge N_0 wächst zuerst während acht Jahren mit der festen jährlichen Zuwachsrate von 4.5% und anschliessend während weiteren acht Jahren mit $p\%$ pro Jahr.
Wie gross muss p sein, damit sich N_0 in sechzehn Jahren verdoppelt? (4 P.)
- (b) Der Kunde einer Druckerei benötigt (rechteckige) Blätter mit einer bedruckbaren Fläche von 200 cm^2 . Ausserdem wünscht er oben und unten auf dem Blatt einen Rand von 2.0 cm und Seitenränder von jeweils 1.5 cm Breite.
Welche Abmessungen für das Blatt muss die Druckerei wählen, damit der Papierverbrauch möglichst gering ist (Resultate auf 1 mm genau)? (4 P.)
- (c) Ein aussen blau gefärbter Holzquader, dessen Kantenlängen ganzzahlige Vielfache von 1 cm sind, wird durch zu den Seitenflächen parallele Schnitte in lauter Würfelchen mit der Kantenlänge 1 cm zersägt. 64 dieser Würfelchen sind völlig ohne Farbe. Die Anzahl der Würfelchen mit genau einer blauen Seitenfläche ist doppelt so gross wie die Anzahl derjenigen mit genau zwei blauen Flächen.
Ermitteln Sie (systematisches Ausprobieren erlaubt) die Kantenlängen aller Quader, für welche die obigen Bedingungen zutreffen. (4 P.)