gymnasium liestal

Maturitätsprüfungen 2009 – Mathematik schriftlich

Klasse 4BM (B-Teil)

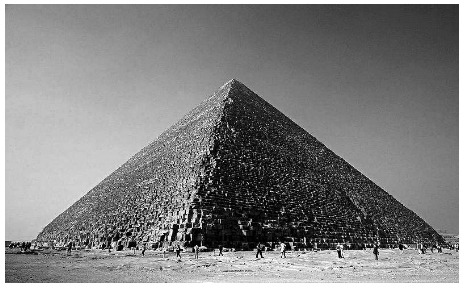
Bemerkungen:	Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden.
	Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt!
Hilfsmittel:	Die von Ihren Lehrpersonen bewilligten Taschenrechner und Formelsammlungen.
	Der Rechner muss im Auslieferungszustand sein.
	Sie dürfen Ihr Taschenrechnerhandbuch benutzen (keine Notizen darin!).

Punkteverteilung:

1	2	3	4	5	Total
12	12	12	12	12	60

Aufgabe 1

Wir stellen uns eine ägyptische Pyramide, wie die berühmte Cheops-Pyramide vor (siehe Bild). Die folgenden Massangaben sind gegenüber dem Original leicht verändert, damit die Rechnung schönere Zahlen ergibt.
Die betrachtete Pyramide sei eine gerade Pyramide mit einer quadratischen Grundfläche von 230 m Kantenlänge. Für den Neigungswinkel α der Seitenflächen gegenüber der Grundfläche gelte $\tan\alpha = \frac{4}{3}$. Die Grundfläche mit den Ecken $ABCD$ der Pyramide liege in der x-y-Ebene eines dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystems, so dass A im Ursprung liegt, B auf der x-Achse und D auf der y-Achse. Die Spitze der Pyramide nennen wir S.



a) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Seitenflächenebene E_{ABS}, sowie die Koordinaten der Spitze S der Pyramide. (2 P.)

b) Zeichnen Sie ein Schrägbild der Pyramide im Koordinatensystem, das auf dem Beilageblatt gegeben ist. (1 P.)

c) Berechnen Sie den Neigungswinkel einer Seitenkante der Pyramide gegen die Grundfläche, sowie den Winkel zwischen zwei benachbarten Seitenflächen der Pyramide. (3 P.)

d) Das Zentrum einer würfelförmigen Grabkammer liegt 30 m über der Grundflächenebene, hat von der Ebene E_{ABS} einen Abstand von 50 m und von der Kante AS einen Abstand von 50 m. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Zentrums. (3 P.)

e) Das Zentrum der eigentlichen Königskammer ist der Mittelpunkt der Inkugel der Pyramide. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Mittelpunktes und geben Sie die Gleichung der Inkugel an. (3 P.)

Aufgabe 2

Durch die Gleichung $y = 30a \cdot \frac{x-a}{x^2}$, in welcher der Paramter a nur positive Werte annehmen soll, ist eine Kurvenschar gegeben.

a) Zeichnen Sie die Kurve für $a = 2$ (Einheit auf den Koordinatenachsen: 1 Häuschen). (2 P.)

b) Nennen und begründen Sie drei der Eigenschaften, die alle Kurven der Schar haben. (2 P.)

c) Auf welcher Kurve liegen die Extremal- und auf welcher Kurve liegen die Wendepunkte der Kurven der Schar? (3 P.)

d) Beweisen Sie, dass sich alle Wendetangenten der Kurven der Schar auf der y-Achse schneiden. (2 P.)

e) Der Parameter a sei wiederum 2. Wir betrachten gleichschenklige Dreiecke ABC mit der Basis AB, wobei für die Ecken A, B, C gelten soll: A ist der Punkt $(2|0)$; B ist ein variabler Punkt $(u|0)$ mit $u > 2$; C liegt auf der Kurve.

Gibt es unter diesen Dreiecken eines mit extremalem Flächeninhalt?

Welche Werte kann der Flächeninhalt eines solchen Dreiecks annehmen? (3 P.)

Aufgabe 3

Gegeben sind die Funktionen f_k mit der Gleichung $y = \left(1 + \frac{x}{k}\right) \cdot e^{-k \cdot x}$ und h mit der Gleichung $y = e^x$. Es wird $\mathbf{k} > \mathbf{0}$ vorausgesetzt. G_k bezeichne den Graphen von f_k, und H denjenigen von h.

a) Zeichnen Sie G_k und H für $k = 2$ im gleichen Koordinatensystem (Einheit auf den Koordinatenachsen: 2 Häuschen). (2 P.)

b) Für welchen Wert von k schneiden sich G_k und H auf der y-Achse senkrecht? (2 P.)

c) Für welche Werte von k liegt der Extremalpunkt von G_k im ersten Quadranten? (2 P.)

d) Für welche Werte von k berühren sich G_k und H? (2 P.)

e) G_k schliesst mit der x-Achse (ab der Nullstelle nach rechts) eine ins Unendliche reichende Fläche ein.

Berechnen Sie ihren Inhalt in Abhängigkeit von k (beachten Sie beim Taschenrechnereinsatz: $k > 0$ ist vorausgesetzt!). Für welchen Wert von k wird dieser Flächeninhalt minimal?

Kann man k so wählen, dass die y-Achse diese Fläche halbiert? (4 P.)

Aufgabe 4

Unsere Mensa bietet 12 Süssigkeiten an, die im Folgenden der Einfachheit halber von 1 bis 12 durchnummeriert sind.

Nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Preis in Fr.	0.90	1.60	1.10	1.20	2.50	1.20	1.10	1.80	2.00	0.60	2.10	2.50

a) Während einer bestimmten 6-Tage-Woche kaufen Sie jeden Tag genau eine Süssigkeit. Wie viele Möglichkeiten für die Wahl der Süssigkeiten in dieser Woche gibt es, wenn

a_1) Sie lauter verschiedene Süssigkeiten kaufen und es darauf ankommt, an welchem Tag Sie welche Süssigkeit kaufen, (1 P.)

a_2) Sie lauter verschiedene Süssigkeiten kaufen und es nicht darauf ankommt, an welchem Tag Sie welche Süssigkeit kaufen, (1 P.)

a_3) Sie beliebige Süssigkeiten kaufen und es darauf ankommt, an welchem Tag Sie welche Süssigkeit kaufen, (1 P.)

a_4) Sie beliebige Süssigkeiten kaufen und es nicht darauf ankommt, an welchem Tag Sie welche Süssigkeit kaufen? (1 P.)

b) Sie machen nun eine ganze 6-Tage-Woche lang jeden Tag folgenden Versuch: Sie werfen zwei Würfel; die Augensumme ergibt die Nummer der Süssigkeit, die Sie an diesem Tag kaufen. Pro Tag kaufen Sie nur eine Süssigkeit.

Berechnen Sie den Erwartungswert der Kosten für die Süssigkeiten pro Tag. (2 P.)

c) Eine der begehrten Süssigkeiten sind die Schaumköpfe, die von einer zerbrechlichen Schicht Schokolade bedeckt sind. Diese Schaumköpfe werden von der Herstellerfirma in Packungen mit jeweils 20 Schaumköpfen verschickt. Die Schokoladenschicht eines Schaumkopfes hat mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.1 Risse.

c_1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Packung mehr als 4 Schaumköpfe Risse haben. (2 P.)

c_2) In einer bestimmten Packung habe es genau 5 Schaumköpfe mit Rissen. Sie kaufen 10 Schaumköpfe daraus. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 3 davon Risse haben? (2 P.)

c_3) In einer anderen Packung habe es ebenfalls genau 5 Schaumköpfe mit Rissen. Sie möchten gerne genau 3 Schaumköpfe ohne Risse haben. Sie beginnen nun, die Schaumköpfe einzeln zu kaufen. Bei jedem Schaumkopf, den Sie kaufen, prüfen Sie nach, ob er Risse hat, dann kaufen Sie den nächsten Schaumkopf. Das machen Sie, bis Sie die gewünschten 3 Schaumköpfe ohne Risse haben.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit müssen Sie genau 5 Schaumköpfe kaufen? (2 P.)

Aufgabe 5

Gegeben sind die Gerade

$$h : \vec{r} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

die Ebene

$$E : 4x + y - 8z + 39 = 0$$

und die feste Kugel

$$K : x^2 + 12x + y^2 - 8y + z^2 + 2z + 17 = 0.$$

Im Punkt $A(3|0|-3)$ starten Kugeln K_r mit bestimmten Radien r. Die Mittelpunkte M_r bewegen sich von A aus auf der Halbgeraden in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Der Radius der sich bewegenden Kugel sei 2. In welchem Punkt R trifft die Kugel K_2 auf die Ebene E? (3 P.)

b) Der Radius der sich bewegenden Kugel sei 3. In welchem Punkt S trifft die Kugel K_3 auf die feste Kugel K? (3 P.)

c) Wie gross dürfen die Radien der sich bewegenden Kugeln sein, damit sie die Gerade h nie berühren? (3 P.)

d) Der Radius der sich bewegenden Kugel sei nun 6. In welchem Punkt F trifft die Kugel K_6 auf die Gerade h? (3 P.)

Zusatzblatt zu Aufgabe 1