Gymnasium Liestal — Maturitätsprüfungen 2008

Mathematik — **Klasse 5KSW**

Bemerkungen:	Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden.
	Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt!
Hilfsmittel:	TI 89 oder Voyage 200 und Formelsammlungen.
	Der Rechner muss im Auslieferungszustand sein.
	Sie dürfen Ihr Taschenrechnerhandbuch benutzen (keine Notizen darin!).

Punkteverteilung:

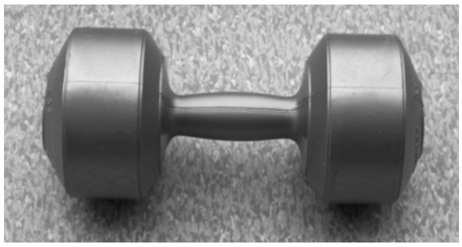
1	2	3	4	5	Total
10	12	13	11	12	58

Aufgabe 1 - Integralrechnung

Hinweis: Der Taschenrechner benötigt unter Umständen lange für die Berechnungen.

a) Gesucht ist die ganzrationale Funktion 4. Grades, deren Graph zur y-Achse symmetrisch ist, durch den Punkt $P(0|-2)$ geht und im Punkt $Q(6|-\frac{182}{25})$ die Steigung $-\frac{127}{200}$ hat. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Funktion. (3 P.)

b) Lässt man nun das endliche Flächenstück, das der Graph der Funktion und die x-Achse begrenzen um die x-Achse rotieren, so entsteht ein Rotationskörper mit einer hantelähnlichen Form. Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers, gerundet auf ganze Zahlen. (3 P.)



Hinweis: Falls Sie Aufgabe a) nicht lösen konnten, verwenden Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{256}x^4 - \frac{593}{1600}x^2 - 2$.

c) Wenn die angegebenen Masszahlen in cm genommen werden, und die Hantel mit Wasser gefüllt wird, so entspricht das Volumen des Rotationskörpers gerade der Masse des Körpers in Gramm. Die Hantel soll nun etwas leichter werden. Dazu wird links und rechts, symmetrisch zur y-Achse, etwas abgeschnitten (Schnittflächen werden natürlich abgedichtet). Wie lange wird die Hantel, wenn sie 1500 Gramm Masse haben soll (2 Dezimalstellen)? (2 P.)

Nun soll die Hantel aus Aufgabe b) schwerer werden. Dazu soll ihre Länge gleich bleiben wie in Aufgabe a) aber diesmal die Dicke verändert werden. Die Funktion wird deshalb entsprechend verändert und mit Hilfe eines Parameters $p > 0$ geschrieben:

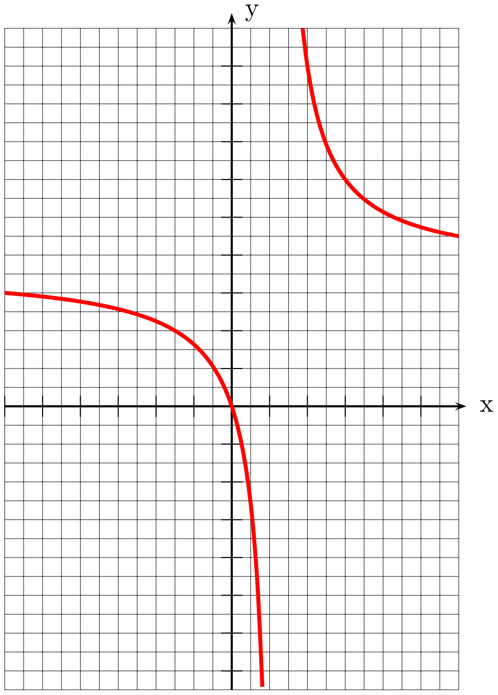
$$g_p(x) = p \cdot \left(\left(\frac{x}{4}\right)^4 - \left(\frac{10x}{16}\right)^2 \right) + \frac{x^2 - 100}{50}$$

d) Für welchen Parameterwert p entspricht die Funktion $g_p(x)$ der oben in a) bestimmten Funktion 4. Grades? (1 P.)

e) Für welchen Wert von p hat die mit Wasser gefüllte Hantel ein Volumen von $5000\,\mathrm{cm}^3$ (bzw. die Masse 5000 Gramm)? - Geben Sie das Resultat auf 2 Stellen nach dem Komma an. (1 P.)

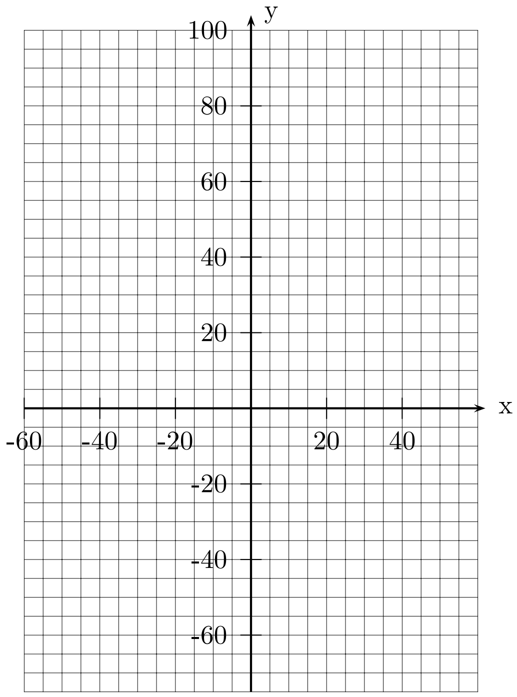
Aufgabe 2 - Differentialrechnung

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{36x}{x-12}$ (siehe Skizze).



a) Berechnen Sie die Gleichungen aller Asymptoten und tragen Sie diese Asymptoten in das oben stehende Koordinatensystem ein. Beschriften Sie dazu auch die Achsen korrekt. (2.5 P.)

b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f'(x)$ in das untenstehende Koordinatensystem. (1 P.)



Der verschiebbare Punkt P liegt auf dem Graphen, für seine x-Koordinate gilt $x > 12$. Der Punkt O sei der Ursprung und der Punkt Q, welcher auf der x-Achse liegt, habe dieselbe x-Koordinate wie der Punkt P.

c) Finden Sie einen Ausdruck für die Flächeninhaltsfunktion $A(x)$ für das Dreieck OPQ. (1 P.)

d) Finden Sie die Koordinaten desjenigen Punktes P, für welchen der Flächeninhalt des Dreiecks OPQ extremal wird und berechnen Sie diesen Flächeninhalt. (2.5 P.)

Der Punkt B hat die Koordinaten $B(12|36)$. Eine Gerade mit der Steigung 1 durch B schneidet den Graphen von f in den beiden Punkten P_1 und P_2.

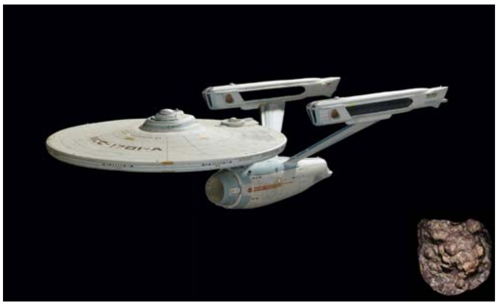
e) Berechnen Sie die Koordinaten dieser beiden Punkte. (2 P.)

f) Zeigen Sie, dass die Strecke $\overline{BP_1}$ gleich lang wie die Strecke $\overline{BP_2}$ ist. (1 P.)

g) Begründen Sie, wieso der Abstand $\overline{P_1P_2}$ die kürzeste Distanz zwischen den beiden Ästen des Graphen von f ist. (1 P.)

h) Finden Sie alle ganzzahligen Werte für x, welche die Bedingungen $f(x) < 100$ und $f''(x) > 1$ erfüllen. (1 P.)

Aufgabe 3 - Vektorgeometrie



Das Raumschiff Enterprise, dessen räumliche Ausdehnung nicht berücksichtigt werden soll, startet in der Galaxie M104 und bewegt sich anfangs auf einer Geraden, die die Punkte $A(0|4|-2)$ und $B(-5|-7|-6)$ enthält. Der Punkt B wird zu einem späteren Zeitpunkt als A erreicht. Ein kleiner Meteorit nähert sich dem Raumschiff auf der Geraden

$$g_{\text{Meteorit}} : \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Überprüfen Sie rechnerisch "von Hand", ob für das Raumschiff eine Kollisionsgefahr besteht. (2 P.)

Admiral James T. Kirk ändert vorsichtshalber die Richtung des Raumschiffs, das sich nun entlang des Strahls $g_{\text{Raumschiff}}$ bewegt:

$$g_{\text{Raumschiff}} : \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b) Um welchen Winkel α hat das Raumschiff seine Richtung geändert? Runden Sie auf 2 Dezimalen. (2 P.)

c) Der wissenschaftliche Offizier T'gai Spock berechnet eine Koordinatengleichung der Ebene ε, in der beide Bahnen des Raumschiffes liegen. Welche Gleichung beschreibt diese Ebene ε? (2 P.)

Die Bewohner des Planeten Krrgh bei $K(8|16|12)$ fühlen sich bedroht und schicken einen energiereichen Phaserstrahl in Richtung des Raumschiffs, das sich entlang der Geraden $g_{\text{Raumschiff}}$ bewegt. Es soll in demjenigen Punkt Q getroffen werden, zu dem der Strahl die kürzeste Zeit benötigt.

d) Welche Koordinaten hat der geplante Zielpunkt Q? (3 P.)

Doch das Raumschiff reagiert unerwartet. Es hält an und baut sofort ein Schutzschild in der Form einer Kugel auf, wobei sich das Raumschiff nun im Mittelpunkt $M(7|13|2)$ der Kugel befindet. In diesem Moment trifft der Laserstrahl den Schutzschild im Punkt $S(9|17|8)$ und wird an dessen Tangentialebene $E_S : x + 2y + 3z - 67 = 0$ reflektiert. Dabei erleuchtet als Warnsignal die ganze Oberfläche des kugelförmigen Schutzschilds in einem grellen Blau.

e) Berechnen Sie den Flächeninhalt der blauen Fläche. Runden Sie auf eine ganze Zahl. (1.5 P.)

f) Geben Sie den Richtungsvektor $\vec{e}$ des reflektierten Strahls exakt mit möglichst kleinen ganzzahligen Komponenten an. (2.5 P.)

Aufgabe 4 - Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit

Eine Schulklasse besteht aus 18 Jungen und 14 Mädchen. Bei einem Preisausschreiben gewinnt die Klasse 25 Karten der gleichen Kategorie für ein Fussball-Länderspiel der Europameisterschaft, die der Lehrer an die Schüler/-innen verteilen soll.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es für den Lehrer, eine 25-köpfige Gruppe aus den Schüler/-innen zusammenzustellen? (1 P.)

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine 25-köpfige Gruppe aus den Schüler/-innen zusammenzustellen, wenn genau 10 Mädchen in der Gruppe sein sollen? (1.5 P.)

Der Klassenlehrer beschliesst auf Grund der Fairness, die Fussballkarten zu verlosen. Er gibt dazu 25 Treffer und 7 Nieten in eine Urne und lässt jede/n aus der Klasse einmal ziehen. Heidi soll als Zweite ein Los ziehen. Sie beschwert sich, dass ihre Wahrscheinlichkeit, einen Treffer zu erzielen, geringer sei als bei Lena, die als Erste ziehen wird.

c) Begründen Sie mit Hilfe einer Rechnung, dass der Einwand von Heidi unberechtigt ist! (1.5 P.)

Die glücklichen Gewinner der Klasse betreten 2 Stunden vor Anpfiff des Fussball-Länderspiels das Stadion. Im Stadionbereich befindet sich eine Torwand mit zwei Löchern. Renno ist ein geübter Torwand-Schütze und trifft, wenn er auf das obere Loch zielt, dieses mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.1. Für das untere Loch trifft er in der Regel in 8 von 20 Fällen.

d) Renno muss zuerst das untere Loch treffen und anschliessend das obere. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt er genau einen Treffer? (1 P.)

e) Renno hat gleich mit seinem ersten Schuss das untere Loch getroffen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er anschliessend auch noch das obere Loch? (1 P.)

f) Wie oft muss Renno mindestens auf das untere Loch schiessen, damit er dieses mit mehr als 80% Sicherheit mindestens einmal trifft? (2 P.)

g) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt Renno beim oberen Loch mindestens 3 Treffer, wenn er 15 Mal konzentriert auf dieses Loch der Torwand gezielt hat! (2 P.)

Unmittelbar vor Spielbeginn behauptet der Stadionsprecher, dass seit der Fussball-EM im eigenen Land die Fussballbegeisterung in der Stadt gestiegen sei und mittlerweile 80% der Einwohner dieser Stadt den Ausbau des Stadions befürworten. Um diese Behauptung zu testen, befragen die Schüler/-innen in der Halbzeitpause 131 zufällig ausgewählte Zuschauer.

h) Bewerten Sie den von den Schülern durchgeführten Test hinsichtlich seiner Eignung, die Behauptung des Stadionsprechers zu überprüfen? (1 P.)

Aufgabe 5.1 - Exponentialfunktionen (Halbaufgabe)

Messungen der CO_2-Konzentration in der Atmosphäre haben ein exponentielles Wachstum während der letzten Jahre gezeigt. Modell A (http://metoffice.gov.uk) sagt vorher, dass die CO_2-Konzentration von 300 ppmv (ppmv steht für parts per million units by volume) Ende 1980 sich bis Ende 2010 gemäss der Formel $C(t) = a \cdot e^{kt}$ verdoppeln wird. (Dabei ist C die CO_2-Konzentration, e die Eulersche Zahl, t die Zeit in Jahren nach Ende 1980 und k eine Konstante.)

a) Berechnen Sie die Werte von a und k für das Modell A. (1 P.)

b) Berechnen Sie die momentane Änderungsrate der CO_2-Konzentration, welche von Modell A für das Ende des Jahres 2010 vorhergesagt wird in ppmv pro Jahr. (1 P.)

Hinweis: Falls Sie keine Lösungen in Aufgabe a) erhalten haben, verwenden Sie $a = 290$ *und* $k = 0.029$.

Andere Forscher schlagen Modell B vor, das auf anderen Daten basiert, wonach die CO_2-Konzentration nach Ende 1980 wie folgt steigt:

$$\ln(C(t)) = \ln(250) + 0.04t,$$

wobei C die CO_2-Konzentration in ppmv und t die Zeit in Jahren nach dem Ende von 1980 ist.

c) Bestimmen Sie die CO_2-Konzentration in ppmv Ende 1980 gemäss Modell B. (0.5 P.)

d) In welchem Jahr wird sich gemäss Modell B die CO_2-Konzentration gegenüber 1980 verdoppelt haben? (1 P.)

e) Für welches Jahr sagen beide Modelle dieselbe CO_2-Konzentration voraus? (1.5 P.)

f) Angenommen beim Erreichen einer CO_2-Konzentration von 800 ppmv würden Massnahmen ergriffen, so dass die Konzentration danach um 2% pro Jahr abnimmt. Nach wie vielen Jahren nach Ergreifen dieser Massnahmen würde die Konzentration wieder auf 300 ppmv gesunken sein? (1 P.)

Aufgabe 5.2 - Trigonometrie (Halbaufgabe)

Eine gerade Pyramide hat ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge r als Grundfläche. Alle anderen Seiten der Pyramide haben die Seitenlänge s.

a) Zeigen Sie, dass das Volumen der Pyramide durch

$$V = \frac{r^2\sqrt{3s^2 - r^2}}{12}$$

gegeben ist. (2 P.)

Die Pyramide wird nun mit einer Seitenfläche, welche nicht gleichseitig ist, auf einen horizontalen Tisch gestellt.

b) Zeigen Sie, dass die Höhe der Pyramide durch

$$h = \sqrt{\frac{r^2(3s^2 - r^2)}{4s^2 - r^2}}$$

ausgedrückt werden kann. (2 P.)

c) Bestimmen Sie den Winkel zwischen dem gleichseitigen Dreieck und der Tischfläche für $r = 4$ und $s = 7$. Geben Sie die Antwort auf 1 Dezimale genau. (2 P.)

Viel Erfolg wünschen Ihnen Dr. Christian Freiburghaus, Thomas Blott, Maria Montero, Dr. Dorothy Fagan, Dennis Krüger, Eric Lucas, Dr. Constantin von Weymarn und Dr. Raphael Ugolini!