Gymnasium Liestal — Maturitätsprüfungen 2008

Mathematik (Français) — **Klasse 4FIS**

Remarques: La durée de l'examen est de 4 heures.
Commencez chaque exercice sur une nouvelle feuille.

Moyens: Calculatrice et formulaire: "Fundamentum".
La calculatrice doit être dans le même état qu'à la livraison.
Vous pouvez utiliser le manuel de la calculatrice (sans annotation!).

Répartition des points:

Exercice	1	2	3	4	5	Total
Points	10	12	13	11	12	58

Exercice 1 - Calcul intégral

Indication: La calculatrice peut avoir besoin de temps pour certains calculs!

a) Une fonction polynomiale f de degré 4 est recherchée. Ses propriétés sont les suivantes:

- le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe-y,
- le graphe de f passe par le point $P(0|-2)$,
- le graphe de f a une pente de $-\frac{127}{200}$ au point $Q(6|-\frac{182}{25})$.

Déterminer cette fonction f. *(3 P)*

b) Une surface finie A_f, délimitée par le graphe de f et l'axe-x, engendre un volume de révolution V_f en forme d'haltère (*hantelförmig*) par rotation autour de l'axe-x. Déterminer la valeur du volume de révolution V_f - Arrondir le résultat au nombre entier le plus proche. *(3 P)*

Indication: Si la partie a) n'a pas pu être résolue, utiliser la fonction f suivante:
$f(x) = \frac{1}{256}x^4 - \frac{593}{1600}x^2 - 2$.

c) Si les unités sont données en centimètre (cm) et que l'haltère précédente est remplie d'eau alors son volume en cm^3 à la même valeur que sa masse en gramme (gr). L'haltère doit être maintenant allégée (*erleichtern*). Pour ce faire, les extrémités gauche et droite de cette dernière sont coupées de façon symétrique et parallèle à l'axe-y . Quelle est la longueur l de cette nouvelle haltère si sa masse est de 1500 grammes? *(2 P)*

L'haltère V_f de la partie b) doit être, à présent, alourdie (*schwerer sein*). Pour cela, sa longueur est maintenue constante et sa largeur modifiée. Pour obtenir cette transformation, la fonction f est complétée en introduisant un paramètre $p > 0$:

$$g_p(x) = p \cdot \left(\left(\frac{x}{4}\right)^4 - \left(\frac{10x}{16}\right)^2 \right) + \frac{x^2 - 100}{50}$$

d) Pour quelle valeur du paramètre p la fonction $g_p(x)$ correspond-elle à la fonction polynomiale $f(x)$ calculée en a)? *(1 P)*

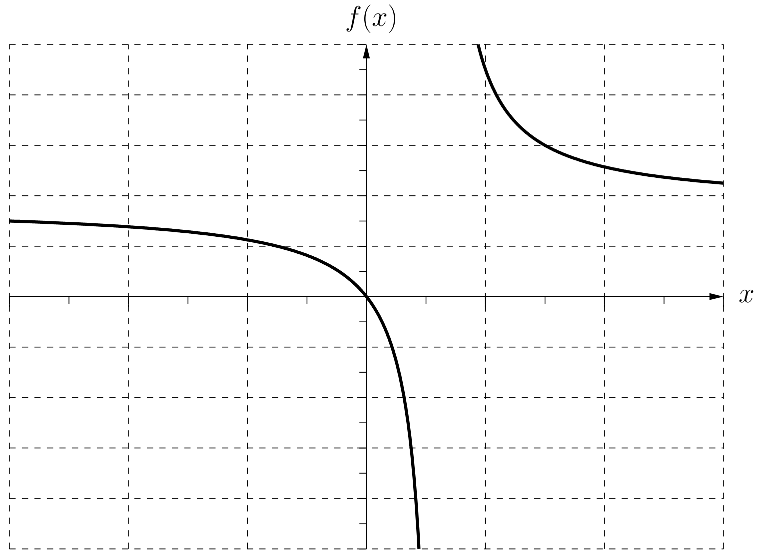
e) Pour quelle valeur de p, cette nouvelle haltère V_g construite à l'aide de $g_p(x)$, a-t-elle un volume de 5000 cm^3? - Arrondir le résultat au deuxième chiffre après la virgule. *(1 P)*

Exercice 2: Calcul différentiel

Soit la fonction $f(x)$ suivante,

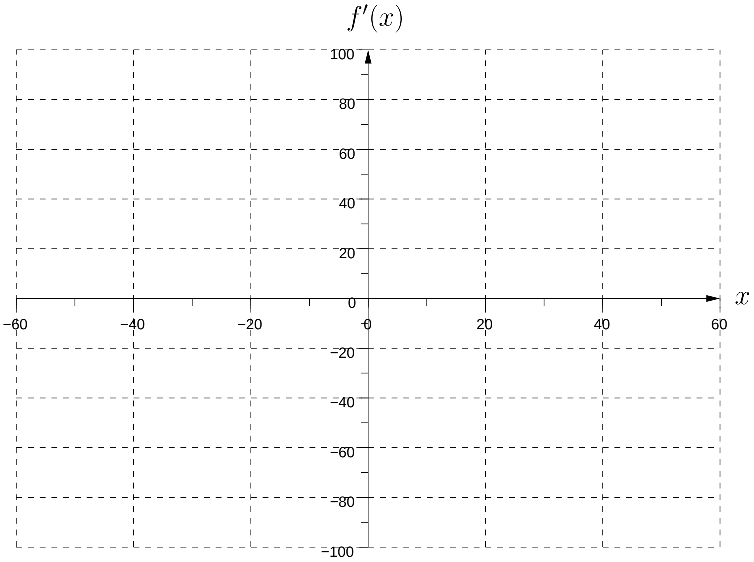
$$f(x) = \frac{36x}{x-12} \quad \text{avec} \quad x \in \mathbb{R}$$

tracée ci-dessous,



a) Déterminer les équations de toutes les asymptotes du graphe de $f(x)$ puis dessiner ces asymptotes dans le système de coordonnées ci-dessus en prenant soin de noter les valeurs des graduations des axes. *(2.5 P)*

b) Tracer ensuite le graphe de la fonction $f'(x)$ dans le système de coordonnées ci-dessous. *(1 P)*



Le point mobile (*verschiebbar*) $P(p_x|p_y)$ se situe sur le graphe de $f(x)$. Sa coordonnée-x est telle que $p_x > 12$. Le point O est placé à l'origine et le point $Q(q_x|q_y)$, situé sur l'axe-x, a la même coordonnée-x que le point P.

c) Donner une expression de la surface $A(x)$ du triangle OPQ. *(1 P)*

d) Déterminer les coordonnées du point P pour lequel la surface du triangle OPQ atteint un extremum. Calculer ensuite la valeur de cette surface. *(2.5 P)*

Soit un point B défini par $B(12|36)$. Une droite de pente égale à 1 passe par B et coupe le graphe de f en deux points P_1 et P_2.

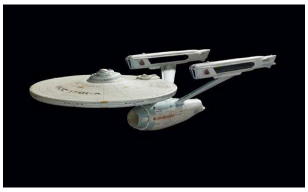
e) Calculer les coordonnées de P_1 et P_2. *(2 P)*

f) Montrer que les segments $\overline{BP_1}$ et $\overline{BP_2}$ ont la même longueur. *(1 P)*

g) Démontrer que la longueur de $\overline{P_1P_2}$ correspond à la distance la plus courte entre les deux branches du graphe de f. *(1 P)*

h) Trouver toutes les valeurs entières de x pour lesquelles les conditions $f(x) < 100$ et $f''(x) > 1$ sont toutes deux satisfaites. *(1 P)*

Exercice 3 - Géométrie vectorielle



Le vaisseau spatial *Enterprise*, considéré ici de la taille d'un point pour simplifier le problème, quitte la Galaxie M104. Il se déplace le long d'une droite qui contient les points $A(0|4|-2)$ et $B(-5|-7|-6)$. Le point B est atteint temporellement après le point A.

Un petit météorite s'approche alors du vaisseau spatial le long d'une droite $g_{\text{météorite}}$ définie par:

$$g_{\text{météorite}}: \quad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

a) Vérifier numériquement si un risque de collision existe. *(2 P)*

Par précaution, l'amiral James T. Kirk modifie la direction du vaisseau spatial de sorte qu'il suive une trajectoire g_{vaisseau} donnée par:

$$g_{\text{vaisseau}}: \quad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

b) De quel angle le vaisseau spatial a-t-il modifié sa trajectoire? - Arrondir au deuxième chiffre après la virgule. *(2 P)*

c) L'officier scientifique T'gai Spock détermine le plan E contenant les deux trajectoires du vaisseau. Quelle est l'équation de ce plan E? *(2 P)*

Les habitants de la planète Krrgh, située en $K(8|16|12)$, se sentent menacés par la situation. Ils envoient donc, par mesure de précaution, un rayon laser dévastateur en direction de l'*Enterprise* qui se déplace toujours selon g_{vaisseau}. Le point Q de la trajectoire du vaisseau est visé afin de réduire au minimum le temps de propagation (*Ausbreitungszeit*) du laser.

d) Quelles sont les coordonnées du point Q visé? *(3 P)*

Cependant, habile, l'*Enterprise* réagit immédiatement. Il diminue d'abord brusquement sa vitesse et enclenche ensuite son bouclier protecteur en forme de sphère au centre $M(7|13|2)$ duquel est situé le vaisseau spatial. Juste à ce moment, le laser mortel frappe le bouclier au point $S(9|17|8)$ puis est réfléchi par le plan tangentiel E_S de la sphère:

$$E_S: \quad x + 2y + 3z - 67 = 0 .$$

Au moment de l'impact, toute la surface du bouclier protecteur s'illumine d'une couleur bleue extrêmement vive.

e) Déterminer la surface F de la boule bleue. - Arrondir au nombre entier le plus proche. *(1.5 P)*

f) Donner les composantes du vecteur directeur $\overrightarrow{e}$ du rayon réfléchi avec des nombres entiers aussi petits que possible *(2.5 P)*

Exercice 4 - Combinatoire et probabilités

Une classe d'école est composée de 18 garçons et de 14 filles. Grâce à un concours, la classe a gagné 25 billets indentiques pour une des rencontres de football de L'Euro. Le professeur a la responsabilité de distribuer les billets aux élèves.

a) De combien de façons le professeur peut-il constituer un groupe de 25 élèves? *(1 P)*

b) De combien de façons est-il possible de former un groupe de 25 élèves contenant exactement 10 filles? *(1.5 P)*

Pour des raisons d'équité (*Fairness*) le professeur organise un tirage au sort. Il met dans une urne 25 billets gagnants ainsi que 7 billets perdants tous identiques et demande à chaque élève de tirer un billet de l'urne. Heidi est la deuxième à devoir tirer un billet. Elle se plaint que sa probabilité de tirer un billet gagnant est inférieure à celle de Lena qui est la première à tirer.

c) Démontrer à l'aide de calculs que l'objection (*Einwand*) de Heidi est infondée! *(1.5 P)*

Les heureux gagnants de la classe pénètrent dans le stade de football deux heures avant le coup d'envoi de la rencontre. Dans l'enceinte du stade, un jeux d'habileté appelé le *Torwand* (un mur d'entraînement de tirs au but dans lequel deux trous sont percés : un supérieur et un inférieur) est organisé. Renno qui a l'habitude de jouer au *Torwand* est capable de faire passer le ballon dans le trou supérieur, quand il le vise, avec une probabilité de 0.1. Par contre, quand il vise le trou inférieur, il réussit à marquer en règle générale 8 fois sur 20.

d) Renno vise d'abord le trou inférieur et tire puis ensuite le trou supérieur et tire. Quelle est la probabilité lors de ces deux tirs, qu'un seul de ces ballons exactement atteigne son objectif? *(1 P)*

e) Renno a déjà atteint le trou inférieur lors de son premier tir. Quelle est la probabilité qu'il atteigne ensuite le trou supérieur lors de son second tir? *(1 P)*

f) Combien de fois, au minimum, Renno doit-il tirer sur le trou du bas afin qu'au moins un but soit marqué avec une assurance supérieure ou égale à 80%? *(2 P)*

g) Quelle est la probabilité que Renno atteigne au moins 3 fois le trou supérieur, quand il le vise, s'il fait 15 tentatives? *(2 P)*

Juste avant le début du match, le speaker du stade affirme que depuis que la ville a été désignée pour participer à l'Eurofoot, l'enthousiasme pour le football s'est emparé (a augmenté) de la ville et qu'en moyenne 80% de ses habitants ont soutenu le projet de construction du stade. Pour vérifier cette affirmation, les élèves ont profité de la pause durant la mi-temps (*Halbzeitpause*) pour interroger au hasard 131 spectateurs à se sujet.

h) Le test organisé par les élèves permet-il de vérifier l'affirmation du speaker (justifier)? *(1 P)*

Exercice 5 - Fonctions Exponentielles (demi-exercice)

La mesure de la concentration de CO_2 dans l'atmosphère montre une croissance exponentielle de leur valeur ces dernières années. Un modèle A (`http://metoffice.gov.uk`) prédisait que la concentration de CO_2, qui était de 300 ppmv à la fin de l'année 1980, allait doubler d'ici 2010 suivant la formule:

$$C(t) = a \cdot \mathrm{e}^{kt}$$

où C est la concentration de CO_2, t le temps en année depuis la fin de l'année 1980 , a et k des constantes.

a) Calculer la valeur des constantes a et k du modèle A. *(1 P)*

b) Calculer la variation instantanée de la concentration de CO_2 prédit par le modèle A à la fin de l'année 2010 en ppmv par année. *(1 P)*
Indication : Dans le cas où la partie a) n'a pas pu être résolue, utiliser $a = 290$ *et* $k = 0.029$.

D'autres scientifiques proposent un modèle B basé sur des données différentes dans lequel la concentration de CO_2 croît depuis la fin de l'année 1980 comme:

$$\ln(C(t)) = \ln(250) + 0.04t$$

où C est la concentration de CO_2 en ppmv et t le temps en années depuis la fin de l'année 1980.

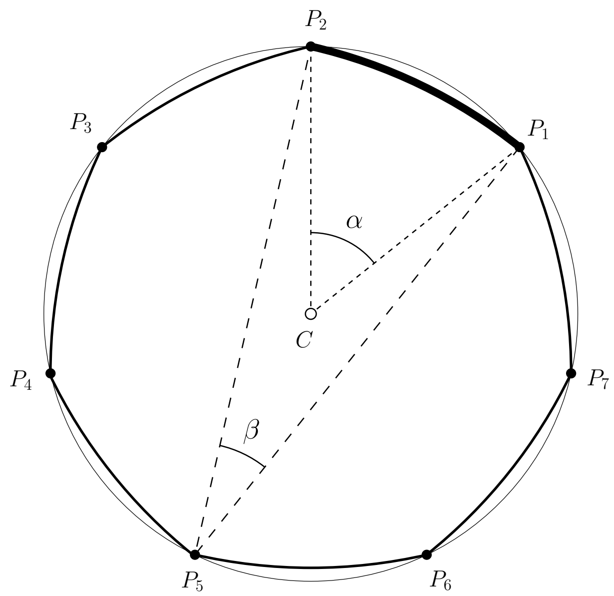
c) Déterminer à partir du modèle B la concentration de CO_2 à la fin de l'année 1980. *(0.5 P)*

d) En quelle année, selon le modèle B, la concentration de CO_2 va-t-elle doublée par rapport à la valeur qu'il donne en 1980? *(1 P)*

e) Pour quelle année les deux modèles annoncent-ils la même concentration de CO_2? *(1.5 P)*

f) En supposant qu'à partir d'une concentration de CO_2 de 800 ppmv, des mesures écologiques de réduction des émissions de CO_2 soient prises de façon à faire baisser la concentration de 2% par année. Une fois les mesures appliquées, combien d'années faut-il pour que la concentration de CO_2 redescend à 300 ppmv? *(1 P)*

Exercice 5 - Trigonométrie (demi-exercice)



Les 7 points $P_1, P_2, \dots, P_7$ sont répartis régulièrement dans le sens inverse des aiguilles d'une montre le long d'un cercle de centre C et de rayon égal à 14mm. Conformément au théorème de l'angle au centre, l'angle α est deux fois plus grand que l'angle β.

a) Déterminer la valeur exacte du rapport :

$$\frac{\text{longueur du segment } P_5P_1}{\text{longueur du segment } CP_1}.$$

(1.5 P)

b) La forme d'une pièce de monnaie anglaise de 50 Pence est construite de la manière suivante:

- 7 points sont répartis régulièrement sur un cercle de rayon $r = 14$mm.
- Le bord de la pièce est formé de 7 arcs de cercle (*Kreisbogen*, voir figure). Le premier arc va de P_1 à P_2 (avec P_5 comme centre), le second va de P_2 à P_3 (avec P_6 comme centre), le troisième va de P_3 à P_4 (avec P_7 comme centre), etc...

(i) Déterminer la surface de la forme géométrique décrite en arrondissant au mm^2 le plus proche. *(3 P)*
Indication : Dans le cas où la parie a) n'a pas pu être résolue, utiliser 1.85 *pour le rapport des segments.*

(ii) La pièce de monnaie a une épaisseur de 2mm. Déterminer la surface totale d'une telle pièce. Donner le résultat au mm^2 près. *(1.5 P)*

Nous vous souhaitons BONNE CHANCE! Christian Freiburghaus, Maria Montero, Thomas Blott, Dorothy Fagan, Dennis Krüger, Constantin von Weymarn, Raphael Ugolini et Eric Lucas.