Gymnasium Liestal — Maturitätsprüfung 2008

Mathematik Profile A, B — Klassen 4A, 4B

Bemerkungen:	- Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden.
	- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
	- Die Arbeit mit dem Taschenrechner muss dokumentiert sein.
Hilfsmittel:	- CAS-Taschenrechner mit Anleitung.
	- Formelsammlung
Punkte:	- Bei jeder Aufgabe steht die maximale Punktzahl.

Analysis (12 Punkte)

1. Gegeben ist die Kurvenschar

$$f_k(x) = \frac{1 + k \cdot \ln x}{x} \qquad \text{mit } k \in \mathbb{R}^+.$$

Die Teilaufgaben (a), (b) und (d) müssen für die volle Punktzahl von Hand gelöst sein.

(a) Berechnen sie die Nullstelle N_k und den Hochpunkt H_k von f_k in Abhängigkeit des Parameters k. (3 P.)

(b) Zeigen Sie, dass alle Kurven der Schar durch H_1 (Hochpunkt für den Parameter $k = 1$) verlaufen. (1 P.)

(c) Zeichnen Sie mit den bisherigen Resultaten die Graphen der Kurven für die Parameter $k = \frac{1}{2}$ und $k = 4$. [Längeneinheit $2\,cm$] (2 P.)

(d) Welche Werte können die Nullstellen N_k und die x-Koordinaten der Hochpunkte H_k für $k \in \mathbb{R}^+$ annehmen? Begründen Sie Ihre Antwort! (3 P.)

(e) Bestimmen Sie die Gleichung der Kurve H, auf der die Hochpunkte H_k liegen, und zeichnen Sie H in der Figur von (c) ein. (3 P.)

Geometrie (12 Punkte)

2. Gegeben sind die Punkte $A(10/0/0)$, $B(0/10/0)$ und die Ebenenschar $E_a : ax - z = 0$, a $\in \mathbb{R}^+$.

(a) Welche spezielle Lage haben alle Ebenen dieser Schar? (1 P.)

(b) H_a ist der Lotfusspunkt des vom Punkt A auf die Ebene E_a gefällten Lots. Berechnen Sie die Koordinaten von H_a in Abhängigkeit von a. (2 P.)

(c) Der Punkt H_a, der Koordinatenursprung O und die Punkte A und B bilden die Ecken eines (nicht regulären) Tetraeders $OABH_a$. Zeichnen Sie das Schrägbild dieses Tetraeders für $a = 2$ auf dem Beilageblatt. (1 P.)

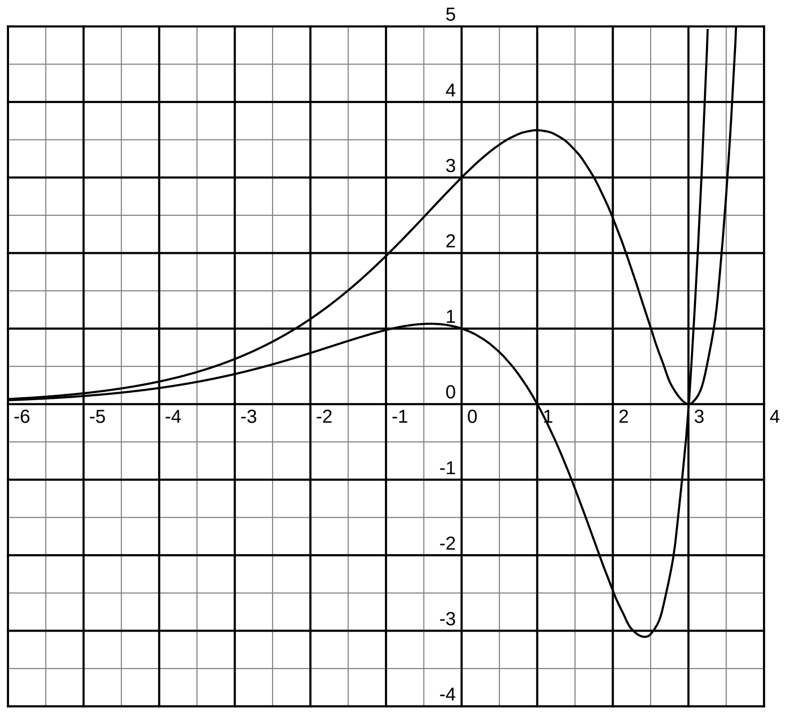
(d) Begründen Sie, dass alle Seitenflächen des Tetraeders $OABH_a$ rechtwinklige Dreiecke sind. (3 P.)

(e) Für welchen Wert des Parameters a wird das Tetraedervolumen $V(a)$ maximal? (2 P.)

(f) N ist der Mittelpunkt der Strecke AH_2. Diejenige Ebene E_a, die N enthält, schneidet das Tetraeder $OABH_2$ und zerlegt es in zwei Teilkörper, T_1 (unten) und T_2 (oben).
Zeichnen Sie im Schrägbild von (c) die Schnittfläche ein und bestimmen Sie das Verhältnis, in dem die Volumina der beiden Teilkörper T_1 und T_2 stehen. (3 P.)

Analysis (10 Punkte)

3. Die Darstellung zeigt den Graphen einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten, stetigen Funktion f sowie den Graphen einer Stammfunktion F von f. Die Achsenabschnitte beider Graphen und die Koordinaten des Berührungspunktes des Graphen von F mit der x-Achse sind ganze Zahlen.



(a) Der Graph von f und die x-Achse begrenzen im 4. Quadranten ein Flächenstück. Bestimmen Sie dessen Inhalt mit Hilfe der graphischen Darstellung von F auf eine Dezimale genau (keine Verwendung des Taschenrechners). Begründen Sie Ihr Vorgehen! (1 P.)

(b) Für die Funktion f gilt der Ansatz $f(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^x$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Werte der Parameter a, b, c. (2 P.)

(c) f gehört zur Funktionenschar $f_k(x) = \frac{1}{3}(x-3)(x-k) \cdot e^x$. Beweisen Sie dies! Für welchen Wert von k liegt der Hochpunkt des Graphen auf der y-Achse? (3 P.)

(d) Alle Graphen der Funktionenschar schliessen mit einer Ausnahme mit der x-Achse zwei Flächenstücke von endlichem Inhalt ein. Welcher Wert von k stellt die Ausnahme dar? (1 P.)

(e) Berechnen Sie alle möglichen Werte des Parameters k, für welche die unter (d) definierten Flächenstücke gleichen Flächeninhalt haben. (3 P.)

Wahrscheinlichkeit (12 Punkte)

4. Eine Klasse besteht aus 12 Schülerinnen und 8 Schülern. Der Lehrer erhält regelmässig Freikarten für den Besuch von Konzerten. Er lost aus, wer die Freikarten erhält, indem er ein regelmässiges Ikosaeder wirft; die geworfene Augenzahl entspricht dabei der Nummer des Schülers bzw. der Schülerin in der Klassenliste.

   (a) Nach wievielen Auslosungen hat ein bestimmtes Klassenmitglied mit einer Wahrscheinlichkeit von über 90 % mindestens eine Freikarte erhalten? (2 P.)

   (b) Wieviele Freikarten kann ein Klassenmitglied nach 60 Auslosungen erwarten?
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat es nach 60 Auslosungen mehr als vier Freikarten erhalten? (2 P.)

   (c) Für ein bestimmtes Konzert erhält der Lehrer 5 Freikarten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit verteilt er mehr Freikarten an Schülerinnen als an Schüler? (2 P.)

   (d) Nach einem Lehrerwechsel erhält auch der neue Lehrer 5 Freikarten für ein Konzert. Er findet aber, jeder Schüler und jede Schülerin sollte bei der Auslosung höchstens eine Freikarte erhalten können. Deshalb will er für die Auslosung nicht das Ikosaeder werfen.
   Schlagen Sie ihm ein Zufallsexperiment für die Auslosung vor.
   Wie gross wird jetzt die Wahrscheinlichkeit des in (c) beschriebenen Ereignisses? (2 P.)

   (e) Der Klasse werden 20 (nicht nummerierte) Karten geschenkt: 7 der Kategorie A und 13 der Kategorie B.
   Auf wieviele Arten kann man diese Karten verteilen, wenn jedes Klassenmitglied eine Karte erhalten soll?
   Auf vieviele Arten ist dies möglich, wenn jedes Klassenmitglied eine Karte erhalten soll und genau 4 Karten der Kategorie A an Mädchen gehen sollen? (2 P.)

   (f) Der Klasse werden 20 nummerierte Karten geschenkt; die entsprechenden Plätze liegen in einer Reihe. Die Mädchen möchten alle nebeneinander sitzen.
   Auf wieviele Arten können jetzt die Karten verteilt werden? (2 P.)

Optimierung (10 Punkte)

5. Fässer sind Rotationskörper. Auf halber Höhe befindet sich das Spundloch. Die schmalen Bretter, welche der Küfer zur Wand des Fasses aneinander fügt, heissen Dauben. Zu Keplers Zeiten wurde das Volumen eines Fasses wie folgt bestimmt: Man steckte einen Zollstock durch das Spundloch des Fasses und mass den Abstand e des entferntesten Punktes des Bodens oder des Deckels vom Spundloch. Aus e liess sich dann das Volumen bestimmen.

   Bei den folgenden Aufgaben ist die Materialdicke zu vernachlässigen.

   (a) Man hatte natürlich ein Interesse daran, bei gegebenem Abstand e ein Fass mit möglichst grossem Volumen zu haben. In welchem Verhältnis stehen Höhe h und Durchmesser d eines derart optimierten *zylindrischen* Fasses?
   Wie gross ist das Volumen eines derart optimalen Fasses, wenn $e = 58\,cm$ gemessen wird? (6 P.)

   (b) Bei einem Fass, dessen Dauben *parabolisch* gekrümmt sind, ergeben die Messungen folgende Resultate:
   Höhe $h = 130\,cm$,
   Durchmeser von Boden und Deckel $d = 60\,cm$,
   $e = 97\,cm$ (e nach der oben beschriebenen Methode gemssen).
   Wie gross ist der Inhalt dieses Fasses? (Resultat exakt und auf Liter gerundet angeben) (4 P.)

Beilageblatt zur Aufgabe 2