Gymnasium Liestal — Maturitätsprüfung 2007

Mathematik

Klassen 4FIS/4GL/4MS/4SZ/4Wa/4Wb/5KSW

Bemerkungen: Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden.
Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.

Hilfsmittel: Taschenrechner und Formelsammlung.

Punkteverteilung:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Total
Punkte	8	5	10	12	10	5	50

Aufgabe 1: Analysis

Für eine ganzrationale Funktion f soll gelten:

(i) $f(4) = 2$,

(ii) $f'(4) = 0$,

(iii) $f''(x) < 0$ für alle $x \in R$,

(iv) $\int_0^6 f(x)dx = 0$.

Begründen Sie Ihre Antworten auf folgende Fragen präzise und vollständig.

a) Wie viele Wendestellen hat f? (1 P.)

b) Wie viele Extremalstellen hat f? (2 P.)

c) Wie viele Nullstellen hat f? (2 P.)

d) Bestimmen Sie die Funktion f, die alle Bedingungen (i) bis (iv) erfüllt. (3 P.)

Aufgabe 2: Zerfall

Eine chemische Substanz wird erhitzt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt die Substanz zu verbrennen. Ihre Masse $m(t)$, die zum Zeitpunkt $t = 0$ den Wert $m(0)$ hat, nimmt mit der Zeit t nach folgendem Gesetz ab:

$$m(t) = m(0) \cdot \frac{2e^t}{1 + e^{2t}} \qquad (t \text{ in Minuten}).$$

Geben Sie im Folgenden alle Resultate als Dezimalbrüche an.

a) Wie viel Prozent der Anfangsmasse ist nach 1 Minute verbrannt? (1 P.)

b) Nach wie viel Minuten sind 99.9 % der Substanz verbrannt? (1 P.)

Die Ableitung der Funktion $m(t)$ bedeutet die Verbrennungsgeschwindigkeit der Masse m.

c) Welche Verbrennungsgeschwindigkeit hat dieser chemische Prozess zur Zeit $t = 0$? (1 P.)

d) Zu welchem Zeitpunkt t ist die Verbrennungsgeschwindigkeit betragsmässig am grössten? (1 P.)

e) Vergleichen Sie Ihre Resultate von c) und d) mit den Eigenschaften des exponentiellen Zerfalls. (1 P.)

Aufgabe 3: Logarithmusfunktion

a) Gegeben ist die Kurvenschar mit der Gleichung

$$y = f_a(x) = \frac{k \cdot \ln(x+1)}{(x+1)^2} \qquad \text{für } x \geqslant 0 \text{ und } k > 0.$$

a1) Zeichnen Sie für $k = 10$ den entsprechenden Graphen der Kurvenschar. (1 P.)

a2) Zeigen Sie, dass alle Graphen der Kurvenschar dieselbe Extremalstelle haben. Wie gross ist der y-Wert des Extremums? (1 P.)

a3) Bestimmen Sie k so, dass der Inhalt A_a des ins Unendliche reichenden Flächenstückes F_a, das vom Graphen der Funktion $f_a(x)$ und von der x-Achse eingeschlossen wird, den Wert 9 hat. (1 P.)

a4) Wie gross wird das Volumen V_a, wenn das obige Flächenstück F_a um die x-Achse rotiert? Für diese Teilaufgabe gilt $k = 9$. (1 P.)

Die folgenden Teilaufgaben b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden.
Für diese gilt ebenfalls $k = 9$.

b) Bestimmen Sie für die Funktion mit der Gleichung

$$y = f_b(x) = \frac{p \cdot q^3 \cdot x}{(x+q)^3} \qquad \text{für } x \geqslant 0 \text{ und } q > 0$$

die Koeffizienten p und q so, dass

- die Graphen von $f_a(x)$ und $f_b(x)$ für $x = 0$ die gleiche Steigung haben und
- der Inhalt A_b des ins Unendliche reichenden Flächenstückes F_b, das vom Graphen von $f_b(x)$ und von der x-Achse eingeschlossen wird, gleich gross wie A_a ist.

(3 P.)

c) Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung

$$y = f_c(x) = \frac{5x}{(x+1)^2} \qquad \text{für } x \geqslant 0.$$

c1) Berechnen Sie für die Funktion $f_c(x)$ den Flächeninhalt A_c des ins Unendliche reichenden Flächenstückes F_c, das vom Graphen von $f_c(x)$ und von der x-Achse eingeschlossen wird. (1 P.)

c2) Wie gross wird das Volumen V_c, wenn das obige Flächenstück F_c um die x-Achse rotiert? (1 P.)

c3) Begründen Sie das Ergebnis für A_c, indem Sie für $f_a(x)$ und $f_c(x)$ die Integralfunktionen $I_a(x) = \int_0^x f_a(t)dt$ und $I_c(x) = \int_0^x f_c(t)dt$ sowie deren Verhalten für $x \to \infty$ bestimmen. (1 P.)

Aufgabe 4: Vektorgeometrie

a) Gegeben ist die Ebene $\epsilon : x + 2y + 2z = 12$, sowie die Punkte $P(6 \mid 1 \mid 2)$ und $F_1(12 \mid 5 \mid 4)$.

a1) Zeichnen Sie die Ebene ϵ in einem Schrägbild. (1 P.)

a2) Weisen Sie nach, dass P in der Ebene ϵ liegt, und markieren Sie diesen Punkt in Ihrer Zeichnung. (1 P.)

a3) Bestimmen Sie die Koordinaten desjenigen Punktes S in der Ebene ϵ, der vom Punkt F_1 den geringsten Abstand hat. (2 P.)
Wenn Ihnen das nicht gelingt, verwenden Sie für den Rest der Aufgabe den Punkt $S(8 \mid 2 \mid 0)$.

b) Die Wände, die Decke und der Boden eines grossen würfelförmigen Zimmers sind durch folgende drei Ebenenpaare gegeben:

$$x = 0 \text{ und } x = 12 \qquad y = 0 \text{ und } y = 12 \qquad z = 0 \text{ und } z = 12.$$

Durch das Zimmer zieht sich ein Spinnennetz, das in der Ebene ϵ liegt. (Masseinheit: Meter).

b1) Zwei Fliegen an den Zimmerwänden können sich nicht sehen, weil eine Spinne im Netz beim Punkt P im Weg sitzt. Die erste Fliege befindet sich bei F_1, die zweite Fliege sitzt an einer Wand beim Punkt $F_2(a \mid 0 \mid b)$. Bestimmen Sie den Ort der zweiten Fliege, das heisst die Zahlen a und b. (2 P.)
Wenn Ihnen das nicht gelingt, verwenden Sie für den Rest der Aufgabe $F_2(3.6 \mid 0 \mid 3.2)$.

b2) Die Spinne bewegt sich auf dem Netz zum Punkt S. Von S aus kann die Spinne beide Fliegen gerade noch gemeinsam in ihrem Blickfeld erkennen. Wie weit ist das Blickfeld der Spinne, das heisst: wie gross ist ihr Blickwinkel auf ein Grad genau? (1 P.)

b3) Die Spinne kann sich nur auf ihrem Netz, den Zimmerwänden, der Decke und dem Boden bewegen und sitzt bei S. Sie ist schnell und kann die Fliege bei F_1 fangen, falls der Weg zu ihr höchstens 7.5 Meter beträgt. Die Spinne überlegt sich, bevor sie sich bewegt, ob sie die Fliege erreichen kann. Zu welchem Schluss kommt sie? Begründen Sie Ihren Entscheid durch eine Rechnung. (2 P.)

b4) Bevor die Spinne ihre Überlegung abgeschlossen hat, sieht die Fliege bei F_1 ein Loch im Netz im Punkt H und fliegt geradlinig in Richtung dieses Loches entlang des Vektors

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes H. Bestimmen Sie auch die Koordinaten des Punktes N (ein Punkt auf der Geraden zwischen F_1 und H), in dem die Fliege den kleinsten Abstand zur Spinne beim Punkt S hat. (3 P.)

Aufgabe 5: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die elektronische Post (E-Mail) ist einer der wichtigsten Kommunikationswege der heutigen Gesellschaft. Unerfreulicherweise machen die unerwünschten Werbe-E-Mails, auch Spam genannt, einen grossen Teil des gesamten E-Mailverkehrs aus.

Um die Benutzer vor der Spamflut zu schützen, verwenden alle E-Mail-Anbieter so genannte Spamfilter. Diese untersuchen alle eingehenden Emails und stellen fest, ob es sich um eine erwünschte E-Mail oder um einen Spam handelt. Erwünschte Emails werden bei den Angestellten in den Posteingang verschoben, während Spams bei den Angestellten in einem speziellen Spam-Ordner abgelegt werden.

a) Eine verbreitete Methode, um Spamfilter zu überlisten, war bis vor einiger Zeit das Umordnen der Buchstaben eines Wortes. Berechnen Sie, wie viele verschiedene Buchstabenanordnungen durch Anwenden dieser Methode aus dem Wort „`haarausfall`" entstehen. (1.5 P.)

b) Anna findet in ihrem Spam-Ordner 15 E-Mails mit Anhang. Vier davon enthalten einen Virus, welcher sich durch Öffnen des Anhangs auf Annas Computer ausbreitet. Anna öffnet zufällig die Anhänge von drei Emails. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Anna mindestens einen Virus öffnet? (1.5 P.)

Gemäss einer Statistik für den Februar 2007 waren 81 % aller versandten E-Mailnachrichten Spam und nur 19 % waren erwünschte E-Mails. Ein Spamfilter ist umso besser, je mehr Spams er als solche erkennt und je weniger erwünschte E-Mails er fälschlicherweise als Spam einstuft. Einer der zurzeit besten Spamfilter erkennt 99.97 % aller Spams als solche und stuft nur 0.025 % aller erwünschten E-Mails als Spam ein.

c) Eine Grossfirma erhält pro Tag 250'000 E-Mails. Wie viele erwünschte E-Mails gehen der Firma durch den Einsatz des Spamfilters pro Tag verloren? (2 P.)

d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine E-Mail, welche ein Angestellter in seinem Postfach findet, Spam ist? Erstellen Sie dazu ein Baumdiagramm. (3 P.)

   Falls Sie diese Aufgabe nicht lösen können, rechnen Sie mit einer Wahrscheinlichkeit für einen Spam im Posteingang von 0.128 % weiter.

e) Eine Angestellte hat in Ihrem Postfach 200 E-Mails. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich darunter genau drei Spam-Nachrichten? (2 P.)

Aufgabe 6: Arithmetik

Es gibt genau eine zehnstellige Zahl, die folgenden Anforderungen genügt:

- Jede der Ziffern von 0 bis 9 kommt genau einmal vor und
- die Zahlen, die aus den ersten n Ziffern dieser Zahl gebildet werden, sind jeweils durch n ohne Rest teilbar ($n = 1, 2, 3, \ldots, 9, 10$).

Wir suchen diese Zahl.

„Falsches Beispiel“: In der zehnstelligen Zahl 1234567890, in der jede Ziffer genau einmal vorkommt, ist zwar

	1	durch 1 teilbar,
	12	durch 2 teilbar,
	123	durch 3 teilbar,
aber	1234	nicht durch 4 teilbar.

Nur einer der folgenden Teilvorschläge (a) bis (f) passt zur gesuchten Zahl. Zeigen Sie für jeden falschen Teilvorschlag, wieso er nicht den Bedingungen genügen kann. Geben Sie an, welcher Teilvorschlag allen Bedingungen genügt und bestimmen Sie die gesuchte Zahl vollständig. (5 P.)

(a) `3 0 9 6 _ _ _ _ _ _`

(b) `3 _ 5 6 _ _ _ _ _ 0`

(c) `3 _ _ 6 _ 4 7 _ _ _`

(d) `3 8 _ 9 5 _ _ _ _ _`

(e) `_ 8 _ _ _ 4 7 6 _ _`

(f) `_ 8 _ 6 _ _ 7 _ 1 _`

Viel Erfolg wünschen Ihnen Maria Montero, Thomas Blott, Bernhard Felder, Andreas Immeli, Guido Lafranchi, Eric Lucas, Mic Rasmussen.