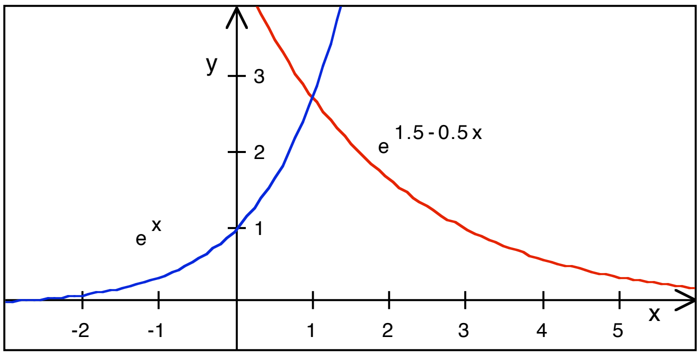
Bemerkungen: Bei jeder Aufgabe steht die Anzahl Punkte, die erreicht werden kann.

Hilfsmittel: Ein Taschenrechner (TI–89, TI Voyage 200), TR-Handbuch, Formelsammlung

1. *Infinitesimalrechnung (10 Punkte)*

Sie haben die Gelegenheit, ein Grundstück zu mieten, das als Garten genutzt werden kann. Die Gartenfläche wird begrenzt durch die y–Achse, die x–Achse, die Parallele zur y–Achse an der Stelle $x = 3$ und die beiden Kurven mit den Gleichungen $y = e^x$ und $y = e^{1.5-0.5x}$.



Der Massstab ist so gewählt, dass eine Einheit in der Skizze 10 Meter auf dem Grundstück entsprechen!

a) Schätzen Sie die Quadratmeterzahl der Gartenfläche ohne Integralrechnung mit einer kurzen Begründung ab.

b) Sie möchten als monatlichen Mietzins höchstens 50 Rappen pro m2 bezahlen. Der Vermieter schlägt Ihnen pauschal Fr 250.– pro Monat vor. Nehmen Sie das Angebot an?

c) Sie möchten den Garten durch eine Parallele zur y–Achse in zwei flächengleiche Teile zerlegen. An welcher Stelle x ziehen Sie die Teilungsgerade? Resultat exakt sowie auf cm gerundet angeben!

Der Vermieter bietet Ihnen an, das Grundstück zu vergrössern. Dafür kann die rechte Begrenzung (d.h. die Parallele zur y–Achse) weiter nach rechts verschoben werden. Die anderen Begrenzungen des Gartens müssen weiter eingehalten werden.

d) An welcher Stelle x befindet sich die rechte Begrenzung, wenn der Garten um 100 m^2 vergrössert werden soll?

e) Angenommen, man könnte die rechte Begrenzung des Gartens beliebig weit nach rechts verschieben, wäre die Miete für diesen unendlich grossen Garten bezahlbar (bei einem Zins von 50 Rappen pro m^2)?

2. *Vektorgeometrie (10 Punkte)*

Die vier Punkte A(3|5|–4) , B(4|1|4) , C (–3|5|8) und D (–4|9|0) sind gegeben.

a) Beweisen Sie, dass die vier Punkte in einer Ebene liegen, und stellen Sie die Koordinatengleichung dieser Ebene auf.

b) Beweisen Sie, dass A, B, C und D die Ecken eines Rhombus sind.

c) Der Punkt S(8|15|6) soll die Spitze einer Pyramide mit dem Rhombus ABCD als Grundfläche sein. Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide.

Erhält man das richtige Resultat, wenn man das Volumen mit 1/3·Grundfläche·$\overline{MS}$, wobei M der Diagonalenschnittpunkt der Grundfläche ist.

d) Der Pyramide von c) wird ein Kreiskegel mit Spitze S einbeschrieben, dessen Grundfläche in der Ebene der Punkte A, B, C und D liegt.

Berechnen Sie das Volumen dieses Kegels.

3. *Infinitesimalrechnung (10 Punkte)*

Diese Aufgabe bezieht sich ausschliesslich auf ganzrationale Funktionen 3. Grades und ihre Kurven.

a) Beweisen Sie, dass alle Kurven genau einen Wendepunkt haben.

Wie gross ist die Steigung der Kurve in ihrem Wendepunkt?

Was lässt sich über die Krümmung der Kurve im Wendepunkt sagen?

Auf welcher Kurve liegen die Wendepunkte, wenn a = c = 1 und d = 0 vorausgesetzt wird?

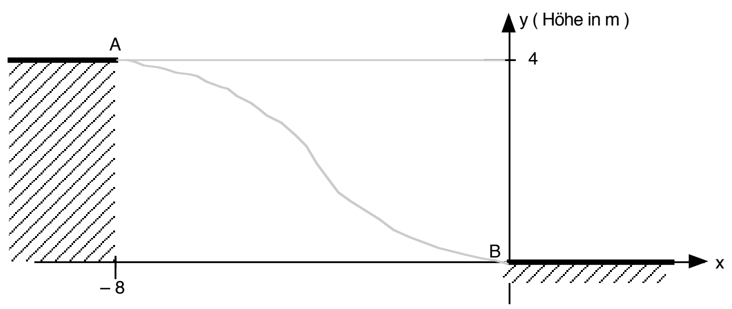
b) Welcher Zusammenhang muss zwischen den Parametern a, b, c und d bestehen, damit die Kurve einen Hochpunkt hat?

Wählen Sie a, b, c und d so, dass die Kurve an der Stelle 5 einen Hochpunkt hat; begründen Sie Ihre Wahl!

Gibt es Kurven, die weder einen Hoch- noch einen Tiefpunkt aufweisen?

c) Für die Jugendlichen eines Dorfes soll eine Velorampe gebaut werden. Dabei muss der gebogene Teil ohne Knick an die waagrechten geraden Teile anschliessen.

Bestimmen Sie die Gleichung der Kurve des gekrümmten Bahnprofils von A nach B dieser Rampe!



4. *Wahrscheinlichkeitsrechnung (10 Punkte)*

Ein Glücksrad ist in vier gleiche Sektoren eingeteilt. Ein Sektor trägt die Ziffer 1, einer die Ziffer 2, einer die Ziffer 3 und einer die Ziffer 4. Gegen einen Einsatz von Fr 4.– darf man folgendes Spiel spielen:

- Das Rad wird einmal gedreht.
- Bleibt es bei einer ungeraden Ziffer stehen, so erhält man als Auszahlung diese Ziffer in Franken.
- Bleibt es aber bei einer geraden Ziffer stehen, so wird es noch einmal gedreht, und man erhält als Auszahlung die Summe der beiden Ziffern, bei denen es stehen geblieben ist.

„Erfolg" soll bedeuten, dass man mehr als den geleisteten Einsatz ausbezahlt bekommt.

a) Die Zufallsvariable X sei die Auszahlung in Franken.
Bestimmen Sie die Verteilung von X.
Zeigen Sie, dass die Erfolgswahrscheinlichkeit 3/8 ist.
Ist das Spiel fair?

b) Einer will das Spiel so oft spielen, bis er zum ersten Mal Erfolg hat.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit spielt er mehr als fünf Mal?

c) Jemand hat das Spiel zwei Mal gespielt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er dabei insgesamt weder Geld gewonnen noch verloren?

d) Einer hat gespielt und Fr 3.– als Auszahlung erhalten.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde das Rad nur einmal gedreht?

e) Man spielt das Spiel zehn Mal.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für mindestens 5 Erfolge?

Die Aufgaben 5 und 6 sind nur für die Klasse 4A (Profil A). Sie sind kürzer und ergeben deswegen weniger Punkte.

5. *Komplexe Zahlen und Funktionen (7 Punkte)*

Gegeben ist die komplexe Abbildung $f(z) = \frac{1}{1-z}$ und die zur reellen Achse parallele Gerade g durch die Punkte P(0.75i) und Q(1+0.75i).

a) Bestimmen Sie das Bild g′ der Geraden g rechnerisch.
Welche geometrische Form ergibt sich? Berechnen Sie die relevanten Parameter.

b) Zeichnen Sie g, P und Q und ihre Bilder g′, P′ und Q′ in die Gausssche Zahlenebene (1 Einheit entspricht 10 Häuschen).
Die Gerade wird durch P und Q in drei Abschnitte unterteilt.
Färben Sie auf g und g′ die Abschnitte, die aufeinander abgebildet werden, mit der gleichen Farbe ein.

c) Finden Sie die komplexe lineare Abbildung, welche g′ so auf den Einheitskreis mit Zentrum im Ursprung abbildet, dass P′ auf P′′(1) landet.
Markieren Sie auf dem Einheitskreis auch Q′′ und die Bilder der drei Abschnitte (analog zu Aufgabe b).

6. *Folgen und Reihen (3 Punkte)*

Die Fläche eines schwarzen Quadrats wird Schritt für Schritt verkleinert, indem kleinere Quadrate weggeschnitten werden. Die Kanten der Quadrate schrumpfen jeweils um den Faktor 1/4. Die Abbildung zeigt die ersten beiden Schritte. Der Vorgang soll aber beliebig lange fortgeführt werden.
Welcher Anteil des schwarzen Quadrats ist in der Grenzfigur noch vorhanden?