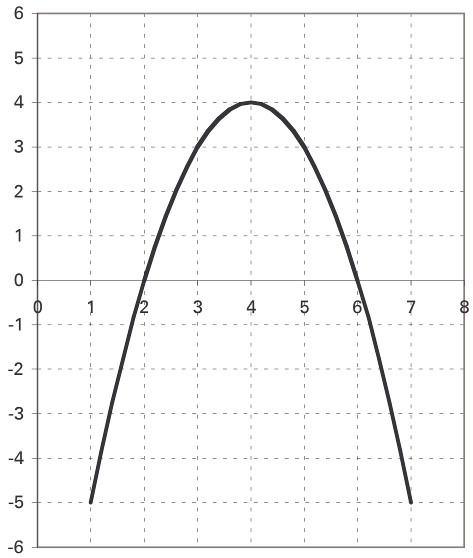
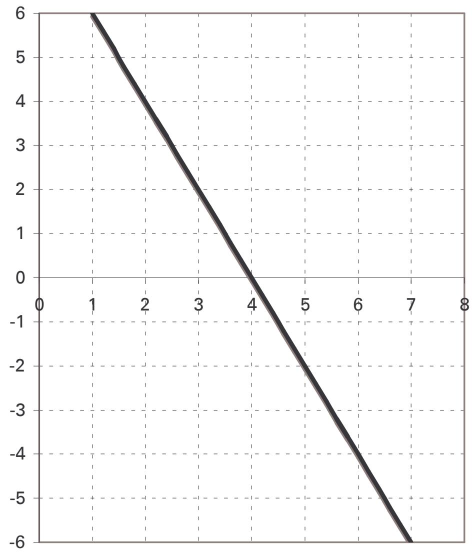
Bemerkungen:	-	*Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden*
	-	*Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt*
	-	*Die Arbeit mit dem Taschenrechner muss dokumentiert sein*
Hilfsmittel:	-	*CAS-Taschenrechner mit Anleitung und Formelsammlung*
Punkte:	-	*Bei jeder der 5 Aufgaben können maximal 10 Punkte erreicht werden*

1. INFINITESIMALRECHNUNG

1. a) Die Funktion $g(x) = a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d$ mit den reellen Koeffizienten $a \neq 0$, b, c und d ist definiert für $1 \leq x \leq 7$.
Der Graph $g'(x)$, die Ableitungsfunktion von $g(x)$, ist unten abgebildet, ebenso der Graph $g''(x)$, die Ableitungsfunktion von $g'(x)$.

$g'(x)$ $g''(x)$





Der Graph von g(x) hat einen Wendepunkt bei P und ein Minimum bei M. Lösen Sie mit Hilfe der oben stehenden Informationen (aus den beiden Graphen) folgende Aufgaben:

(i) Wie lautet die x-Koordinate von P? Begründen Sie Ihre Antwort! (1P)
(ii) Wie lautet die x-Koordinate von M? Begründen Sie Ihre Antwort! (1P)

(iii) Berechnen Sie die Koeffizienten a, b, c und d, wenn zusätzlich gilt $g(4) = 0$. (2P)
(iv) Zeichnen Sie den Graphen von g(x), markieren Sie die Punkte P und M und geben Sie die exakten Koordinaten von P und M an! (1P)
(v) S und T sind zwei weitere Punkte des Graphen g(x). Die Verbindungslinie ST geht durch den Wendepunkt P und steht dort senkrecht zum Graphen g(x). Berechnen Sie die Länge der Strecke ST. (1P)

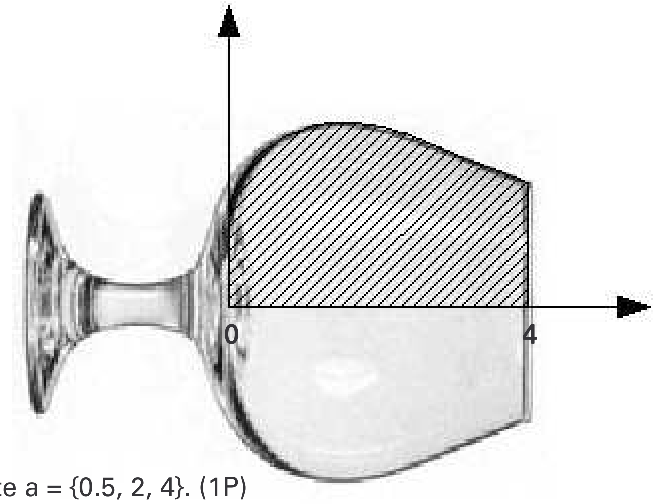
b) Eine gerade Linie g_1 hat die Gleichung $y = k\cdot x$, wobei k eine positive Konstante ist.
Die Gerade g_1 berührt die quadratische Kurve $y = 6x-x^2$ in einem einzigen Punkt Q.

(i) Berechnen Sie die Koordinaten von Q und den Wert der Konstanten k. (1P)

Eine zweite Gerade g_2 hat die Gleichung $y = m\cdot x$, wobei m eine Konstante ist. Die Gerade g_2 schneidet die quadratische Kurve im Punkt Q und in einem weiteren Punkt R.

(ii) Welche Werte sind für m möglich, damit zwei Schnittpunkte entstehen? (0.5P)
(iii) Berechnen Sie die Koordinaten von R als Term in m. (0.5P)
(iv) Berechnen Sie den Inhalt der endlichen Fläche, die durch die beiden Geraden $y = 2x$ und $y = -2x$ und durch die Kurve $y = 6x-x^2$ begrenzt wird. (2P)

2. EXTREMALAUFGABE



2. Wir betrachten die Funktionenschar

$$f_a(x) = \frac{3x}{a} \cdot e^{-\frac{x}{a}} ; 0 < a \leq 5$$

Die Funktionenschar kann im Bereich $0 \leq x \leq 4$ als Randfunktion eines liegenden Cognacglases aufgefasst werden, das (ohne Stiel) entsteht, wenn die Funktion um die x–Achse rotiert wird. Geben Sie alle verlangten Werte auf 3 Stellen nach dem Komma genau an.

a) Zeichnen Sie die Graphen der Schar für die Werte a = {0.5, 2, 4}. (1P)

b) Zeigen Sie: Die maximale Breite des Glases ist für alle Werte des Parameters a dieselbe. Bestimmen Sie diese maximale Breite. (3P)

c) Bestimmen Sie den Wert des Parameters a, für welchen die im Bild sichtbare, schraffierte Querschnittsfläche maximal wird. (3P)

d) Es sei a = 2 und die Einheiten der Koordinatenachsen seien in cm. Wie hoch steht der Flüssigkeitspegel im Glas, wenn 8 cm^3 Cognac eingefüllt werden? (3P)

3. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

3 Im Vorfeld der Fussballweltmeisterschaft in Deutschland entfachten die Panini-Sammelbilder bei Jung und Alt ein fieberhaftes Sammeln. Insgesamt gab es 596 verschiedene Sammelbilder. Davon zeigten 17 Schweizer Spieler.

a) Nehmen wir an, dass von allen Bildchen gleich viele hergestellt wurden. Ein Sammler kauft sich ein Set mit 5 Bildern, in dem keines mehrfach vorkommt.

(i) Wie viele verschiedene Sets sind möglich? (1P)
(ii) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er das Bild von Ronaldinho (Nr 393) erhält? (1.5P)
(iii) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens einen Schweizer erhält? (2P)
(iv) In einer Kiste befindet sich eine riesige Zahl von Sammelbildern. Die Bilder der Schweizer Spieler sind gemäss ihrem Anteil an der Zahl aller Bilder darunter gemischt. Wie viele Karten muss ein Sammler aus der Kiste ziehen, bis er mit einer Wahrscheinlichkeit von über 50% mindestens zwei Schweizer gezogen hat? (2.5P)

b) Drei Sammler haben ihre überzähligen Bilder zusammengelegt: 4 Brasilianer, 8 Engländer, 8 Schweizer. Sie machen ein Spielchen nach folgenden Regeln:
Alle 20 Bilder werden gemischt. Dann erhält Sammler A die erste, Sammler B die zweite und Sammler C die dritte Karte.
Zuerst deckt A seine Karte auf. Er gewinnt, wenn er einen Schweizer hat.
Wenn A nicht gewinnt, dann ist die Reihe an B. Er gewinnt, wenn er einen Schweizer oder einen Brasilianer aufdeckt.
Schliesslich ist C dran, wenn A und B nicht schon gewonnen haben. Er gewinnt, wenn er einen Schweizer oder einen Engländer hat.
Ansonsten endet das Spiel remis.
Wie gross sind die Gewinnwahrscheinlichkeiten für die drei Spieler? (3P)

4. EXPONENTIALFUNKTIONEN, TRIGONOMETRIE

Die beiden Teilaufgaben von Aufgabe 4 sind unabhängig.

4.1. a) Von zwei radioaktiven Stoffen A und B sind zum Zeitpunkt $t = 0$ d die Mengen 8.3 mg resp. 5.7 mg vorhanden. Während die Halbwertszeit von Stoff A 3.2 d beträgt, zerfällt von Stoff B pro Tag jeweils 12% der vorhandenen Menge.

(i) Zu welchem Zeitpunkt sind von den beiden Stoffen die gleichen Mengen vorhanden? Wie gross ist diese Menge (in mg)? (2.5P)

(ii) Mit Hilfe der Aktivität eines Stoffes wird angegeben, welche Menge momentan pro Zeiteinheit zerfällt (Zerfallsrate).
Zu welchem Zeitpunkt ist die Aktivität der beiden Stoffe gleich gross?
Wie gross ist diese Aktivität (in mg/d)? (2.5P)

4.2. Zwei Möwen sitzen auf zwei verschieden hohen Masten und beobachten eine ruhende, auf der Wasseroberfläche schwimmende Ente. Beide Masten mit einem Abstand von $d = 5.1$m befinden sich nebeneinander am Uferrand. Eine Möwe ist $a = 3.2$m und die andere $b = 1.8$m über der Wasseroberfläche. Die höher gelegene Möwe sieht die Ente unter einem Tiefenwinkel $\alpha = 41.2°$ (relativ zur Horizontalen) und die tiefer gelegene Möwe sieht die Ente unter $\beta = 27.3°$.

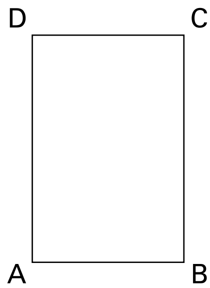
a) Stellen Sie den dreidimensionalen Sachverhalt in einer übersichtlichen Skizze dar und beschriften Sie sie vollständig. (0.5P)

b) Unter welchem Winkel φ sieht die Ente die beiden Möwen? (2.5P)

c) Ein herannahendes Schiff vertreibt die Ente. Welche kürzeste Strecke e muss die Ente zurücklegen, um sich ans Ufer zu retten? (2P)

5. VEKTORRECHNUNG

5. Die Punkte A(1|1|1), B(3|2|3) und D(5|–3|–1) sind die Eckpunkte eines Rechtecks, wobei die Koordinaten in Meter angegeben sind.



a) Wie gross sind Länge und Breite des Rechtecks? (1P)

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass der Winkel $\angle DAB$ gerade 90° beträgt. (0.5P)

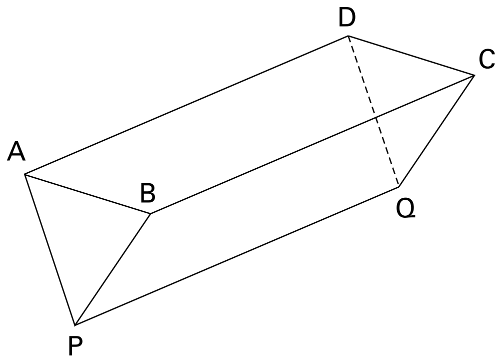
c) Geben Sie die Koordinaten des Punkts C an. (2P)

d) Wie lautet die Koordinatengleichung der Ebene E_{ABCD}, in der das Rechteck liegt? (1P)

e) Zeichnen Sie die Ebene E_{ABCD} im 3-dimensionalen Koordinatensystem. (0.5P)
Hinweis: Zeichnen Sie die Ebene E_{ABCD}: $x+2y-2z+3.5 = 0$, falls Sie die Lösung in Aufgabe d) nicht gefunden haben.

Das Rechteck ABCD ist eine Seitenfläche eines hohlen, geraden Prismas mit dreieckiger Grundfläche, das kürzlich in der Nähe von Stonehenge gefunden worden ist. Archäologen vermuten, dass es sich um eine Grabkammer handeln könnte.

Die Strecken $\overline{PQ}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$ sind parallel. Die Dreiecke ΔAPB und ΔDQC liegen parallel zueinander und stehen senkrecht auf der Ebene E_{ABCD}. Beachten Sie, dass die beiden Dreiecke nicht als gleichschenklig angenommen werden dürfen.



f) Der Punkt M(5.5|1|–3.5) liegt auf der Geraden durch die Punkte P und Q. Berechnen Sie den kürzesten Abstand zwischen dieser Geraden und der Ebene E_{ABCD}. (1P)

g) Wie gross ist der Winkel zwischen den Ebenen E_{ADQP} und E_{BPQC}? (2P)

h) Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts P. (2P)

Viel Erfolg wünschen Ihnen T. Blott, M. Erdin, D. Fagan, M. Montero, R. Ugolini und C. von Weymarn.