Maturitätsprüfung 2005
Klasse 4Wb

Bemerkungen: - Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt.
- Die Arbeit mit dem Taschenrechner muss dokumentiert sein.
- Die Darstellung wird mitbewertet.

Hilfsmittel: - CAS-Taschenrechner mit Anleitung und Formelsammlung.

Punkte: - Bei jeder der 5 Aufgaben können maximal 10 Punkte erreicht werden.

1. Gebrochen-rationale Funktion

Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{x^3+x^2+4}{2x^2}, \quad x \neq 0$.

a) Berechnen Sie (ohne Benutzung der GRAPH-Funktion des Taschenrechners) von dieser Funktion die Nullstelle, den Tiefpunkt T(x_T / y_T) und die Gleichung der nicht-vertikalen Asymptote g. (2P)

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel $p(x)=ax^2+bx+c$, die den Graphen von $f(x)$ in deren Nullstelle und deren Tiefpunkt berührt. (2P)

c) Berechnen Sie *von Hand* den Flächeninhalt der (nach rechts ins Unendliche reichenden) Fläche zwischen dem Graphen von $f(x)$, der Geraden $x=x_T$ und der Asymptoten g. (2P)

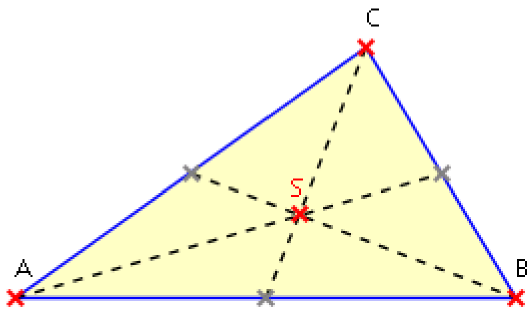
d) Für jedes $t>0.5$ schneidet die Gerade $y=\frac{1}{2}x+t$ den Graphen von $f(x)$ in zwei Punkten P_t und Q_t.

- d$_1$) Berechnen Sie die Koordinaten von P_t und Q_t. (1P)
- d$_2$) Weisen Sie nach, dass die y-Achse jedes Dreieck OP_tQ_t in zwei flächengleiche Teildreiecke zerlegt. (1.5P)

e) Welche Funktion $h(x)=\frac{x^3+bx^2+c}{dx^2}$ hat als Asymptote die Gerade mit der Gleichung $y=\frac{1}{3}x-1$ und an der Stelle $x=3$ eine Extremalstelle? (1.5P)

2. Vektorgeometrie

Die dreieckige Grundfläche einer Pyramide ist definiert durch die Eckpunkte A(-2/3/1), B(4/-1/2) und C(1/-2/-3). Die Spitze D liegt in der Ebene E: 3x–2y+z–6 = 0. S ist der Schwerpunkt der Grundfläche (S ist der Schnittpunkt der Schwerelinien; eine Schwerelinie ist die Strecke von einer Ecke zum Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite). Die Strecke $\overline{SD}$ steht senkrecht zur Grundfläche.



a) Zeichnen Sie die Ebene E mit Hilfe der Spuren im Schrägbild. (1.5 P)
b) Berechnen Sie den Winkel α der Grundfläche beim Eckpunkt A. (1 P)
c) Bestimmen Sie den Inhalt der Grundfläche. (1 P)
d) Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunkts S der Grundfläche. (1 P)
Hinweis: Wenn Sie den Schwerpunkt S nicht finden, rechnen Sie mit S(1/0/0) weiter.
e) Wie lautet die Koordinatengleichung der Grundfläche. (1.5 P)
f) Welche Koordinaten hat die Spitze D? (1.5 P)

Fortsetzung der Aufgabe auf Seite 2

Fortsetzung der Aufgabe zur Vektorgeometrie!
Hinweis: Wenn Sie den Punkt D nicht finden können, rechnen Sie mit D(8/9/-6) weiter.

g) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide. (1 P)

h) Die Pyramide wird nun gedreht und mit der Fläche ACD auf die xy-Ebene gestellt. Eine Kugel wird so auf die Seitenfläche ABC gestellt und festgehalten, dass sie im Punkt B die Fläche ABC berührt. Sie wird losgelassen und rollt dabei auf der Fläche ABC entlang einer Berührgeraden f (Falllinie) nach unten. Wie weit von A entfernt schneidet f die xy-Ebene? (1.5 P)

3. Extremalproblem

Die Blätterteighülle eines Cornets hat etwa die Form eines geraden Kreiskegels. Der Blätterteig wird beim Herstellen vollständig um den Mantel M eines kegelförmigen Metallstücks mit dem Grundkreisradius r = 1.7 cm und der Höhe h = 12.0 cm gewickelt.
Das fertig gebackene Cornet (Kreiskegel) wird ganz mit Vanille-Crème gefüllt. Zudem ragt die Crème oben in der Form *einer Halbkugel* aus dem Teig (der Kugelradius ist gleich gross wie der Grundkreisradius des Kegels).

a) Wie gross ist der Inhalt der Mantelfläche M des Metallstücks, das man zur Herstellung des Cornets verwendet wird, und welche Menge Crème in cm^3 wird zum Füllen eines Cornet benötigt? (3 P)

b) Der Bäcker Leckerschmaus will die Form des kegelförmigen Metallstücks verbessern lassen und schreibt den folgenden Auftrag: *„Um meine Kundschaft optimal bedienen zu können, möchte ich in meine Cornets möglichst viel Vanille-Crème füllen. Die Mantelfläche des kegelförmigen Metallstücks zur Herstellung beträgt 65.0 cm^2. Wie sind Radius r und Höhe h des Metallstücks zu wählen? Welche Menge Crème enthält die "neue" Sorte Cornets?“* (7 P)
Hinweis: Wählen Sie zum Lösen dieser Aufgabe die Moduseinstellung APPROXIMATE.

4. Wahrscheinlichkeit

Die 12 Flächen eines als ideal angenommenen, regulären Dodekaeders sind mit den folgenden Zahlen beschriftet: 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5.
Hinweis: Alle Teilaufgaben sind unabhängig voneinander.

a) Das Dodekaeder wird 2-mal geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, beide Male *keine* "4" zu werfen? (1P)

b) Das Dodekaeder wird 2-mal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der beiden Augenzahlen *gerade* ist. (2P)

c) Das Dodekaeder wird 7-mal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, genau zweimal eine "3" zu werfen. (2P)

d) Wie oft muss das Dodekaeder geworfen werden um mit der Wahrscheinlichkeit von 99.9% mindestens einmal eine "5" zu werfen? (2P)

e) Es wird um Spielgeld gespielt. Ein Spiel besteht aus 2 Würfen. Der Einsatz pro Spiel ist Fr. 2.- . Der Spieler gewinnt das Spiel, wenn die Augenzahl im 2. Wurf höher ist als diejenige des 1. Wurfes, andernfalls gewinnt die Bank. Wenn der Spieler gewinnt, werden ihm Fr. 5.- ausbezahlt (Einsatz + Gewinn), wenn er verliert, geht der Einsatz an die Bank. Berechnen Sie den mittleren Gewinn oder Verlust des Spielers. (3P)

5. Unabhängige Kurzaufgaben

5.1. Wachstum

Die Temperatur T (in °C) eines Ofens ist gegeben durch die Temperaturfunktion

$T(t) = 200 - 180 \cdot e^{-0.1 \cdot t}$. (e ist die EULERsche Zahl)

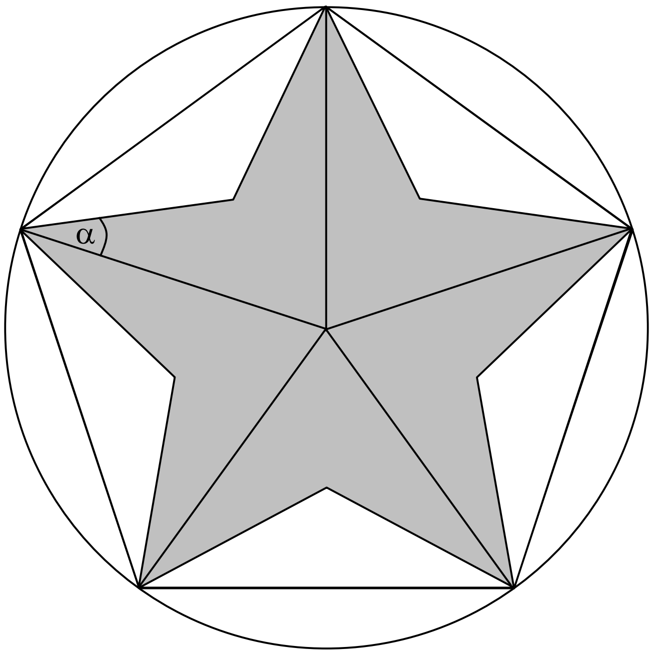
Der Ofen wird zum Zeitpunkt t = 0 eingeschaltet. Die Zeit t ist in Minuten.

a) Zu welchem Zeitpunkt t erreicht der Ofen die Temperatur T = 150 °C? (1P)
b) Welches ist die momentane Temperaturänderung in °C/min, wenn der Ofen die Temperatur T = 150 °C aufweist? (1P)
c) Bei welcher Temperatur T beträgt die Zuwachsrate der Temperatur 10 °C/min? (2P)

5.2. Trigonometrie

Dieser regelmässige Stern besitzt den Umkreisradius 20 cm. Sein Flächeninhalt ist halb so gross wie der Flächeninhalt des regelmässigen Fünfecks.

a) Berechnen Sie die Seitenlänge und den Flächeninhalt des Fünfecks. (2P)
b) Wie gross ist der Winkel α? (2.5P)



5.3. Summe

Die Summe $a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \ldots$ mit unendlich vielen Summanden beträgt 1/6. Welchen Wert hat a exakt? (1.5P)

Viel Erfolg wünschen Ihnen T. Blott, D. Fagan, G. Lafranchi, M. Montero, R. Ugolini, C. von Weymarn