
Bemerkungen: - Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt.
- Die Arbeit mit dem Taschenrechner muss dokumentiert sein.

Hilfsmittel: - CAS-Taschenrechner mit Anleitung und Formelsammlung.

Punkte: - Bei jeder der 5 Aufgaben können maximal 10 Punkte erreicht werden.

Rationale Funktion

1. Gegeben ist die Funktion $f\left(x\right)=\frac{x^3+x^2+4}{2x^2}, \quad x\neq 0$.

1.1. Berechnen Sie (ohne Benutzung der GRAPH-Funktion des Taschenrechners) von dieser Funktion die Nullstelle, den Tiefpunkt $\left(x_T \,/\, y_T\right)$ und die Gleichung der nicht vertikalen Asymptote *g*. (2P.)

1.2. Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel $p\left(x\right)=ax^2+bx+c$, die den Graphen von $f\left(x\right)$ in deren Nullstelle und deren Tiefpunkt berührt. (2P.)

1.3. Berechnen Sie *von Hand* den Flächeninhalt der nach rechts ins Unendliche reichenden Fläche zwischen dem Graphen von $f\left(x\right)$, der Geraden $x=x_T$ und *g*. (2P.)

1.4. Für jedes $t>0.5$ schneidet die Gerade $y=0.5x+t$ den Graphen von $f\left(x\right)$ in zwei Punkten P_t und Q_t.

1.4.1. Berechnen Sie die Koordinaten von P_t und Q_t. (1P.)

1.4.2. Weisen Sie nach, dass die y-Achse jedes Dreieck OP_tQ_t in zwei flächengleiche Teildreiecke zerlegt. (1.5P.)

1.5. Welche Funktion $h\left(x\right)=\frac{x^3+bx^2+c}{dx^2}$ hat als Asymptote die Gerade mit der Gleichung $y=\frac{1}{3}x-1$ und an der Stelle $x=3$ eine Extremalstelle? (1.5P.)

Wahrscheinlichkeitsrechnung

2. Die 12 Flächen eines als ideal angenommen regulären Dodekaeders sind mit den folgenden Zahlen beschriftet: 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5 .

2.1. Das Dodekaeder wird 2-mal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit keine „4“ zu werfen. (1P.)

2.2. Das Dodekaeder wird 2-mal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der beiden geworfenen Augenzahlen gerade ist. (2P.)

2.3. Das Dodekaeder wird 7-mal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit genau 2-mal eine „3“ zu werfen. (2P.)

2.4. Wie oft muss das Dodekaeder geworfen werden, um mit der Wahrscheinlichkeit von 99.9% mindestens einmal eine „5“ zu werfen? (2P.)

2.5. Es wird jetzt um Geld gespielt. Ein Spiel besteht aus 2 Würfen. Der Einsatz pro Spiel ist Fr. 2.-. Der Spieler gewinnt das Spiel, wenn die Augenzahl im 2. Wurf höher ist als diejenige des 1. Wurfes, andernfalls gewinnt die Bank. Wenn der Spieler gewinnt, werden ihm Fr. 5.- ausbezahlt (Einsatz + Gewinn), wenn er verliert, geht der Einsatz an die Bank. Berechnen Sie den mittleren Gewinn oder Verlust des Spielers. (3P.)

Vektorrechnung

3. Die dreieckige Grundfläche einer Pyramide ist definiert durch die Eckpunkte $A(-2/3/1)$, $B(4/-1/2)$ und $C(1/-2/-3)$. Die Spitze D liegt in der Ebene $E: 3x-2y+z-6=0$. S ist Schwerpunkt der Grundfläche (S ist der Schnittpunkt der Schwerlinien; eine Schwerlinie ist die Strecke von einer Ecke zum Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite) und die Strecke $\overline{SD}$ steht senkrecht zur Grundfläche.

3.1. Zeichnen Sie die Ebene E mit Hilfe der Spuren im Schrägbild. (1.5P.)

3.2. Berechnen Sie den Winkel α der Grundfläche beim Eckpunkt *A*. (1P.)

3.3. Bestimmen Sie den Inhalt der Grundfläche. (1P.)

3.4. Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes *S* der Grundfläche. (1P.)
[Hinweis: Wenn Sie den Schwerpunkt *S* nicht finden, rechnen Sie mit $S(1/0/0)$ weiter.]

3.5. Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Grundfläche. (1.5P.)

3.6. Welche Koordinaten hat die Spitze *D*? (1.5P.)
[Hinweis: Wenn Sie den Punkt *D* nicht berechnen können, rechnen Sie mit $D(8/9/-6)$ weiter.]

3.7. Berechnen Sie das Volumen der Pyramide. (1P.)

3.8. Die Pyramide wird nun gedreht und mit der Fläche *ACD* auf die xy-Ebene gestellt. Eine Kugel wird so auf die Seitenfläche *ABC* gestellt und festgehalten, dass sie im Punkt *B* die Fläche *ABC* berührt. Sie wird nun losgelassen und rollt dabei auf der Fläche *ABC* entlang einer Berührgeraden *f* (Falllinie) nach unten. Wie weit von *A* entfernt schneidet *f* die xy-Ebene? (1.5P.)

Extremalaufgabe

4. Die Blätterteighülle eines Cornets hat etwa die Form eines geraden Kreiskegels. Der Blätterteig wird beim Herstellen vollständig um den Mantel *M* eines kegelförmigen Metallstücks mit dem Grundkreisradius $r = 1.7cm$ und der Höhe $h = 12.0cm$ gewickelt. Das fertig gebackene Cornet wird ganz mit Vanillecrème gefüllt. Zudem ragt die Crème oben in Form einer Halbkugel mit dem Radius *r* des Grundkreises aus dem Teig.

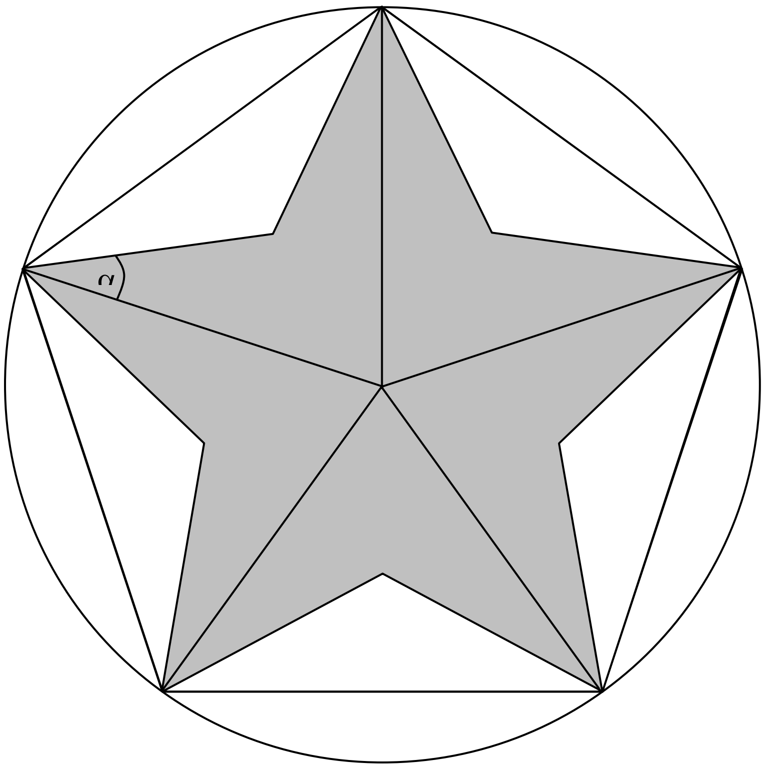
4.1. Wie gross ist der Inhalt der Mantelfläche *M* des Metallstücks, das zur Herstellung der Cornets verwendet wird, und welche Menge Crème (in cm^3) wird zum Füllen eines Cornets benötigt? (3P.)

4.2. Der Bäcker, Herr Leckerschmaus, will die Form des kegelförmigen Metallstücks verbessern lassen und schreibt Ihnen folgenden Auftrag:
„Um meine Kundschaft optimal bedienen zu können, möchte ich in meine Cornets möglichst viel Crème füllen. Die Mantelfläche des kegelförmigen Metallstücks zur Herstellung der Cornets beträgt $65.0cm^2$. Wie sind Radius *r* und Höhe *h* des Metallstücks zu wählen?“ Welche Menge Crème enthält die „neue“ Sorte Cornets? (7P.)
[Hinweis: Wählen Sie zum Lösen dieser Aufgabe die Moduseinstellung APPROXIMATE.]

Trigonometrie, Exponentialfunktion

5. Die Aufgabe besteht aus 2 voneinander unabhängigen Teilaufgaben.

5.1. Dieser regelmässige Stern besitzt den Umkreisradius $r = 20cm$. Sein Flächeninhalt A ist halb so gross wie der Flächeninhalt des regelmässigen Fünfecks.



5.1.1. Berechnen Sie den Flächeninhalt A. (2P.)
5.1.2. Wie gross ist der Winkel α ? (2P.)
5.1.3. Berechnen sie den Umfang U des Sternes. (2P.)

5.2. Die Temperatur T (in $^\circ C$) eines Ofens ist gegeben durch die Temperaturfunktion

$T(t) = 200 - 180e^{-0.1\cdot t}$. (t in Minuten; e ist die EULERsche Zahl)

Der Ofen wird zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschaltet.

5.2.1. Zu welchem Zeitpunkt t erreicht der Ofen die Temperatur $T = 150^\circ C$? (1P.)
5.2.2. Welches ist die momentane Temperaturänderung in $^\circ C/\min$, wenn der Ofen die Temperatur $T = 150^\circ C$ aufweist? (1P.)
5.2.3. Bei welcher Temperatur T beträgt die Zuwachsrate der Temperatur $10^\circ C/\min$? (2P.)

Viel Erfolg wünschen Ihnen T. Blott, D. Fagan, G. Lafranchi, M. Montero, R. Ugolini, C. von Weymarn.