GYMNASIUM LIESTAL

Maturitätsprüfung 2005
Mathematik schriftlich
Klasse 4B

Bemerkungen : Bei jeder Aufgabe steht die Anzahl Punkte, die erreicht werden kann.
Für die Note 6 müssen mindestens 51 Punkte erzielt werden.

Hilfsmittel : Ein Taschenrechner (TI 89, TI 92) . TR – Handbuch. Formelslg.“Fundamentum“.

Aufgabe 1 *(11 Punkte)*

Durch die Gleichung $y = \frac{x^4}{12} - kx^3 + 1$, in welcher der Parameter k nur positive Werte annehmen soll, ist eine Kurvenschar gegeben.

a) Wählen Sie $k = {}^1/3$ und beschreiben und begründen Sie die wichtigsten Merkmale der entsprechenden Kurve.

b) k sei wiederum ${}^1/3$. Finden Sie die Gleichung der ganzrationalen Funktion vierten Grades, deren Graph axialsymmetrisch bezüglich der y-Achse ist und die Scharkurve in ihrem Tiefpunkt und auf der y-Achse berührt.

c) Prüfen Sie, ob die Parabel mit der Gleichung $y = -12x^2 + 109$ die zu $k = 2$ gehörige Kurve der Schar berührt.

d) Wie muss k gewählt werden, damit die zugehörige Kurve der Schar die x-Achse berührt ?
Berechnen Sie die Berührstelle und faktorisieren Sie symbolisch-exakt für diesen Wert von k das zugehörige Funktionspolynom !

Aufgabe 2 *(10 Punkte)*

Die Gerade g sowie vier Punkte A, B, C und D sind gegeben:

$$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}; A(-1;-3;-0.5) \;;\; B(3;1;1.5); C(5;-3;5.5); D(1;-7;3.5).$$

a) Beweisen Sie: ABCD ist ein Quadrat .

b) Beweisen Sie, dass es eine gerade quadratische Pyramide mit der Grundfläche ABCD und der Spitze S auf g gibt. Berechnen Sie ihr Volumen !

c) A, B, C, D, U und V seien die Ecken eines regulären Oktaeders . Berechnen Sie U und V ! Kontrollieren Sie Ihr Resultat, indem Sie das Volumen des Oktaeders mit Hilfe der Ecke U berechnen und anschliessend mit der Formel für das Volumen des regulären Oktaeders:
$V_{Okt} = (\sqrt{2} / 3)\, a^3$ (a: Kantenlänge) .

Aufgabe 3 *(11 Punkte)*

Wir nehmen an, dass der Spieler A zwei Drittel der gegen Spieler B gespielten Schachpartien gewinnt und dass keine Partie unentschieden ausgeht.

a) Es werden drei Partien gespielt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt A mindestens zwei Partien nacheinander ?

b) Es werden fünf Partien gespielt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt A die Mehrheit der Partien ?

c) Wieviele Partien müssen mindestens gespielt werden, damit die Wahrscheinlichkeit, dass B mindestens eine Partie gewinnt, grösser als 99.9 % ist ?

d) Es wird gespielt, bis A zum ersten Mal gewinnt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Anzahl der gespielten Partien gerade ?

e) Wieviele Partien müssen im Mittel gespielt werden, bis B zum ersten Mal gewinnt ?

Klasse 4B Blatt 2

Aufgabe 4 *(10 Punkte)*

Ein gleichschenkliges Trapez ist gegeben durch seine Höhe h und die Längen der parallelen Seiten 2a und 2b, a > b . Ihm werden Rechtecke derart einbeschrieben, dass zwei Eckpunkte auf der Grundseite der Länge 2a liegen; die Länge dieser Rechteckseite wird mit 2x bezeichnet. Die beiden anderen Eckpunkte des Rechtecks können auf der kürzeren Parallelen des Trapezes oder auf seinen Schenkeln liegen.

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt F des einbeschriebenen Rechtecks in Abhängigkeit von x für den Fall h = 3 , a = 6 , b = 2 , und stellen Sie die Funktion F(x) graphisch dar.
Ist diese Funktion überall differenzierbar ?
Welches Rechteck hat den grössten Flächeninhalt ?

b) Lösen Sie die in a) gestellte Extremalaufgabe nun allgemein, d.h. ohne für a, b und h spezielle Werte anzunehmen. Welche Fälle sind betreffend a und b zu unterscheiden ?

Aufgabe 5 *(7 Punkte)*

Wir betrachten eine unendliche Folge von Parabeln: die n-te Parabel hat die Gleichung

$$y = f(x) = \frac{27}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{4}{27} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot x^2 \ (n \in \mathbf{N})$$

a) Berechnen Sie die Scheitel und Nullstellen der ersten drei Parabeln exakt !
Geben Sie einen Term an für die positive Nullstelle der n-ten Parabel !

b) Jede der Parabeln begrenzt zusammen mit der x-Achse ein Parabelsegment. Begründen Sie, dass die Folge der Flächeninhalte dieser Parabelsegmente geometrisch ist. Berechnen Sie die Summe der Flächeninhalte der unendlich vielen Parabelsegmente exakt !

Aufgabe 6 *(6 Punkte)*

Wenn der oberhalb der x-Achse liegende Teil der Kurve mit der Gleichung $y = a \cdot \sqrt{x} \cdot (p^2 - x)$ um die x-Achse rotiert, entsteht ein stromlinienförmiger Körper (a > 0 , p > 0 sind Parameter) .

a) Wie kann man die „Dicke“ dieses Körpers definieren und berechnen ? Geben Sie einen Term an für die „Dicke“ eines solchen Körpers !

b) Ein Tank soll die Form eines solchen Körpers haben und 1000 Liter fassen. Berechnen Sie die Länge dieses Tanks, wenn seine „Dicke“ 1 Meter beträgt
(auf mm runden, Wandstärke vernachlässigen) .