Bemerkungen:	Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden.
	Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt!
	Für die Note 6 müssen mindestens 51 Punkte erreicht werden.
Hilfsmittel:	Die von Ihren Lehrern bewilligten Taschenrechner und Formelsammlungen.
	Der Rechner muss im Auslieferungszustand sein (Menu *Var-Link* leer, keine Unterordner).
	Sie dürfen ihr Taschenrechnerhandbuch benutzen (keine Notizen darin!).

Punkteverteilung:

1	2	3	4	5	Total
12	10	11	11	11	55

Aufgabe 1 - Gebrochen rationale Funktionen mit freiem Parameter

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = \dfrac{x^2 + a}{x - 2}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Diskutieren Sie in Abhängigkeit des Parameters a den Definitionsbereich, Pole und Asymptoten, sowie Nullstellen der Funktion $f_a(x)$. (5 P.)

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a Art (Maximum oder Minimum) und Anzahl der Extremstellen (die y-Werte der Extrempunkte sind nicht gefragt). (3 P.)

c) Beweisen Sie: Die Funktionenschar ist punktsymmetrisch zum Punkt $P(2|4)$. (2 P.)

d) Für welchen Wertebereich von a schliessen die Graphen von $f_a(x)$ und die x-Achse ein Flächenstück ein? Für welches dieser a ist das Flächenstück am Grössten? Was können Sie über diesen grössten Flächeninhalt aussagen? (2 P.)

Aufgabe 2 - Vektorgeometrie

Die Gerade g sowie vier Punkte A, B, C und D sind gegeben:

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad A(-1|-3|-0.5), \quad B(3|1|1.5), \quad C(5|-3|5.5), \quad D(1|-7|3.5)$$

a) Beweisen Sie: $ABCD$ ist ein Quadrat. (3 P.)

b) Beweisen Sie, dass es eine gerade quadratische Pyramide mit der Grundfläche $ABCD$ und der Spitze S auf g gibt. Berechnen Sie ihr Volumen! (3 P.)

c) A, B, C, D, U und V seien die Ecken eines regulären Oktaeders. Berechnen Sie U und V! Kontrollieren Sie Ihr Resultat, indem Sie das Volumen des Oktaeders mit Hilfe der Ecke U berechnen und anschliessend mit der Formel für das Volumen des regulären Oktaeders

$$V_{Okt} = \frac{\sqrt{2}}{3} a^3,$$

wobei a die Kantenlänge ist. (4 P.)

Aufgabe 3 - Stochastik

Wir nehmen an, dass der Spieler A zwei Drittel der gegen Spieler B gespielten Schachpartien gewinnt und dass keine Partie unentschieden ausgeht.

a) Es werden drei Partien gespielt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt A mindestens zwei Partien nacheinander? (2 P.)

b) Es werden fünf Partien gespielt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt A die Mehrheit der Partien? (2.5 P.)

c) Wieviele Partien müssen mindestens gespielt werden, damit die Wahrscheinlichkeit, dass B mindestens eine Partie gewinnt, grösser als 99.9% ist? (2.5 P.)

d) Es wird gespielt, bis A zum ersten Mal gewinnt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Anzahl der gespielten Partien gerade? (2 P.)

e) Wieviele Partien müssen im Mittel gespielt werden, bis B zum ersten Mal gewinnt? (2 P.)

Aufgabe 4 - Rechnen von Hand

In den folgenden unabhängigen Teilaufgaben wird geprüft, ob Sie in der Lage sind auch von Hand zu rechnen. Alle Zwischenschritte müssen vorhanden sein. Kontrolle mit dem Rechner ist erlaubt.

a) Bestimmen Sie das Integral

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x}\, dx$$

. (5 P.)

b) Beweisen Sie folgende Beziehung aus der Formelsammlung (S.44):

$$\int \frac{1}{\sin(x)}\, dx = \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right|$$

(4 P.)

c) Berechnen Sie

$$\lim_{n \to \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

(2 P.)

Aufgabe 5 - Komplexe Funktionen

Gegeben ist die komplexe Funktion $f(z) = (5 - 12i) \cdot z - 8i$.

a) Bestimmen Sie alle Fixpunkte der Abbildung f. (2 P.)

b) Zeigen Sie, dass das Bild des Einheitskreises wieder ein Kreis ist. (3 P.)

c) Die komplexe Abbildung f enthält eine Drehstreckung. Bestimmen Sie den Streckungsfaktor und den Drehwinkel. (2 P.)

Falls Sie kein Ergebnis für den Streckfaktor und den Drehwinkel haben, rechnen Sie mit den Werten $k = 13$ *und* $\varphi = \arctan(-\frac{12}{5})$ *weiter.*

d) Geben Sie nun dieselbe Drehstreckung in Form einer reellen affinen Abbildung an (Abbildungsgleichungen). (4 P.)

Viel Erfolg wünschen Ihnen Christian Freiburghaus und Heinz Gertsch!