Gymnasium Liestal — Maturitätsprüfungen 2004

Mathematik — **Klasse 4Wa**

Bemerkungen: Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden
Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt!

Hilfsmittel: Die von Ihren Lehrern bewilligten Taschenrechner und Formelsammlungen.
Der Rechner muss im Auslieferungszustand sein (Menu *Var-Link* leer, keine Unterordner).
Sie dürfen ihr Taschenrechnerhandbuch benutzen (keine Notizen darin!)

Punkteverteilung:

1	2	3	4	5	Total
10	10	10	10	5+3+2	50

Aufgabe 1 - Kurvendiskussion

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ für $x \geqslant 0$.

a) Skizzieren Sie den Graph für $0 \leqslant x \leqslant 5$. (1 P.)

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Lage des Hochpunkts und beschreiben Sie kurz, wie Sie dabei vorgegangen sind. (1 P.)

c) Als *Breite der Kurve* definieren wir die Differenz der x-Koordinaten der Wendepunkte. Bestimmen Sie die Breite der Kurve. (1 P.)

d) Bestimmen Sie den Inhalt der (ins Unendliche reichenden) Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse begrenzt wird. (1 P.)

e) Finden Sie durch Probieren den Zusammenhang zwischen dem im Teil d) berechneten Flächeninhalt und der Zahl $\sqrt{\pi}$. (1 P.)

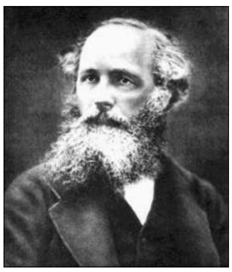
Die Funktion f wird zur Schar $f_t(x) = x^2 \cdot t^{\frac{2}{3}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2t}}$ mit dem Parameter $t > 0$ verallgemeinert.

f) Berechnen Sie in Abhängigkeit von t

- die Koordinaten des Hochpunktes (ohne Erklärung),
- die Breite der Kurve (vgl. Aufgabe c)). (2 P.)

g) Für verschiedene Werte von t ergeben sich verschiedenen Hochpunkte. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $y(x)$ der Kurve, die von der Menge dieser Hochpunkte gebildet wird. (3 P.)

Physikalischer Hintergrund der Aufgabe: Die Funktion f_t beschreibt die Geschwindigkeitsverteilung von Luftmolekülen bei ihrer Braun'schen Bewegung (nach J.C. Maxwell 1831-1879). f_t ist ein Mass für die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Molekül mit der Geschwindigkeit x bewegt. Der Verlauf der Kurve hängt von der Temperatur t ab.



Aufgabe 2 - Extremwertproblem

Eine Ware muss subventioniert werden, damit sie überhaupt produziert wird. Die Subvention betrage k Franken pro Stück. Bei einem Preis von x Franken ist die Nachfrage gegeben durch $N(x) = -0.1x^3 + 5x$. Beim gleichen Preis von x Franken bieten diverse Hersteller insgesamt $A_k(x) = k \cdot x^2$ Stück an.

a) Erstellen Sie eine Skizze mit den Graphen für $N(x)$, $A_{0.2}(x)$ und $A_1(x)$. (1 P.)

b) Bei welchem Preis x ist die Nachfrage maximal? (1 P.)

c) Bei welchem Preis x könnte - unter Berücksichtigung der Nachfrage - der höchste Umsatz erzielt werden? (2 P.)

d) Bei welchem Preis x liegt das Marktgleichgewicht? (2 P.)

e) Wie hoch muss die Subvention k gewählt werden, damit der aufgrund des Marktgleichgewichtes erzielbare Umsatz maximal ist, die Firmen also maximal von den Subventionen gefördert würden, ohne dass unnötig hohe Subventionen ausbezahlt werden ? (4 P.)

Hinweis zu den Einheiten: x hat die Einheit Franken, $N(x)$ und $A_k(x)$ sind Anzahlen und somit einheitenlos. Die Vorfaktoren in $N(x)$ und $A_k(x)$ sind eigentlich mit Einheiten behaftet, damit das Ganze auch von den Einheiten her aufgeht. Der Einfachheit halber werden hier aber diese Einheiten weggelassen. Sie brauchen sich nicht darum zu kümmern.

Aufgabe 3 - Vektorgeometrie

Gegeben ist die gerade Pyramide, deren Grundfläche das Quadrat $ABCD$ mit den Eckpunkten $A(0|0|0)$, $B(8|0|0)$ und $C(8|8|0)$ ist.
Die Spitze S der Pyramide liegt in der Ebene $E_1 : 3x - 5y + 2z = 16$.

a) Geben Sie die Koordinaten des fehlenden Eckpunktes D der Grundfläche an. (0.5 P.)

b) Berechnen Sie die Koordinaten der Spitze S der Pyramide. (2 P.)

c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden PQ mit $P(12|2|0)$ und $Q(2|6|6)$. (0.5 P.)

d) Die Gerade PQ schneidet den Mantel der Pyramide in zwei Punkten. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkt G der Geraden PQ mit der Ebene E_2, die durch die Punkte C, D und S festgelegt ist. (2 P.)

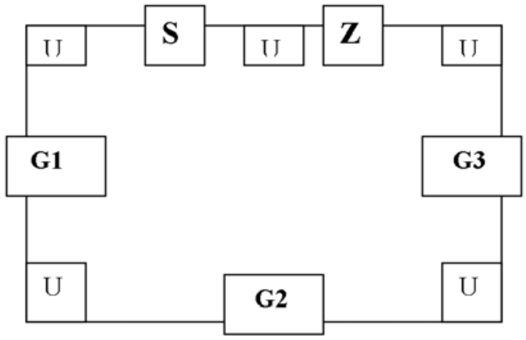
e) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene E_3, welche senkrecht zur xz-Ebene steht und durch die Punkte P und Q verläuft. *(Falls Sie diese Teilaufgabe nicht lösen können, rechnen Sie mit der falschen Ebene $E_3^* : x + z = 12$ weiter.)* (1.5 P.)

f) Welchen Winkel α schliessen die Ebene E_3 und die xy-Ebene ein? (1.5 P.)

g) Die Ebene E_3 schneidet die Pyramide in einer Schnittfigur F. Berechnen Sie die Seitenlängen von F. Um welche Figur handelt es sich? (2 P.)

Aufgabe 4 - Wahrscheinlichkeitsrechnung

Gegeben ist das folgende Spielbrett mit einem Startfeld S und einem Zielfeld Z:



Sie würfeln mit einem handelsüblichen Spielwürfel mit den Augenzahlen 1 bis 6 und bewegen Ihre Spielfigur vom Startfeld S im Gegenuhrzeigersinn auf dem Spielbrett vorwärts entsprechend Ihrer gewürfelten Augenzahl. Dabei gelten folgende vier Spielregeln:

(1) Sobald Sie eine ungerade Zahl würfeln, landen Sie auf einem der ungeraden Felder U. Das Spiel ist dann für Sie zu Ende und Sie haben verloren (=: V).

(2) Solange Sie eine gerade Zahl würfeln, dürfen Sie entsprechend der gewürfelten Augenzahl auf eines der geraden Felder G_1, G_2 oder G_3 vorrücken und nochmals würfeln.

(3) Wenn Sie von den geraden Feldern mit der passenden geraden Augenzahl auf das Zielfeld Z gelangen, haben Sie das Spiel gewonnen (=: G).

(4) Würfeln Sie aber eine gerade Augenzahl, die über das Zielfeld Z hinausführt, ist die erste Runde beendet und Sie müssen wieder auf das Startfeld gehen (=: S).

a) Zeichnen Sie ein vollständiges Baumdiagramm für den Spielverlauf in der ersten Runde. (2 P.)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit,

a1) dass Sie das Spiel in der ersten Runde verlieren: $p(V)$, (1 P.)

a2) dass Sie das Spiel in der ersten Runde gewinnen: $p(G)$, (1 P.)

a3) dass Sie in der ersten Runde wieder auf das Startfeld gelangen: $p(S)$. (1 P.)

Falls Sie kein Resultat aus a) haben, benutzen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten für die weiteren Berechnungen von Teilaufgabe b) und c): $p(V) = \frac{343}{432}$, $p(G) = \frac{127}{1296}$ *und* $p(S) = \frac{35}{324}$.

b) Sie dürfen nun mehrere Runden spielen, falls Sie in den vorhergehenden Runden wieder auf das Startfeld S gelangten.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit,

b1) dass Sie das Spiel in der zweiten Runde gewinnen? (1 P.)

b2) dass Sie das Spiel in der dritte Runde verlieren? (1 P.)

c) Mathematisch gesehen könnte man immer wieder auf das Startfeld S gelangen und so unendlich viele Runden spielen.

c1) Berechnen Sie die totale Gewinnwahrscheinlichkeit für dieses Spiel! (2 P.)

c2) Der Einsatz für dieses Spiel beträgt Fr. 10.–. Es lockt ein Gewinn von Fr. 100.–. Ist dieses Spiel für Sie günstig? (1 P.)

Aufgabe 5 - Kurzaufgaben

Die Teilaufgaben a) bis c) sind voneinander unabhängig lösbar.

a) Zauberlehrling Harry hat eine Kiste mit unendlich vielen Bauklötzen in Würfelform. Der grösste Würfel hat eine Kantenlänge von 10 cm. Der jeweils nächst kleinere besitzt eine Kantenlänge, die um 20% geringer ist als die seines Vorgängers.

(i) Wie hoch ist der Turm, den Harry maximal bauen kann? (1.5 P.)

(ii) Wie gross ist das Gesamtvolumen des Turms? (1.5 P.)

(iii) Wie viele Klötze sind nötig um einen Turm zu bauen, der um höchstens 1 mm weniger hoch ist als der höchst mögliche? (2 P.)

b) Berechnen Sie den Abstand d der windschiefen Geraden $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. (3 P.)

c) Bei der Rotation des Graphen der Funktion $f(x) = (1 - x)\sqrt{x}$ um die x-Achse entsteht ein tropfenförmiger Körper. Wie gross ist sein Volumen? (2 P.)

Viel Erfolg wünschen Ihnen Christian Freiburghaus, Uli Dammer, Maria Montero, Dorothy Fagan, Beat Zemp und Raphael Ugolini!