Gymnasium Liestal — Maturitätsprüfungen 2004

Mathematik — **Klasse 4WZ**

Bemerkungen:
- *Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden.*
- *Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt!*

Hilfsmittel:
- *Taschenrechner TI-89, TI-92 oder TI Voyage 200 mit gelöschtem Speicher; Anleitung zum Taschenrechner und Formelsammlung*

Punkteverteilung:

1	2	3	4	5	**Total**
10	10	3+7	10	10	**50**

---

1. *Kurvendiskussion*

Gegeben ist die Funktion f(x) = $x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ für x ≥ 0.

a) Skizzieren Sie den Graphen für 0 ≤ x ≤ 5. (1 Punkt)

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Lage des Hochpunkts und beschreiben Sie kurz, wie Sie dabei vorgegangen sind. (2 Punkte)

c) Als „Breite" des Graphen definieren wir die positive Differenz der x-Koordinaten der beiden Wendepunkte.
Bestimmen Sie die Breite des Graphen von f. (1.5 Punkte)

d) Bestimmen Sie den Inhalt der (ins Unendliche reichenden) Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse begrenzt wird. (1.5 Punkte)

Die Funktion f wird nun zur Schar $f_t(x)$ = $x^2 \cdot t^{\frac{2}{3}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2t}}$ mit dem Parameter t > 0 verallgemeinert.

e) Berechnen Sie in Abhängigkeit von t:
- den Hochpunkt (ohne Erklärung)
- die Breite des Graphen gemäss Definition in Aufgabe c). (2 Punkte)

f) Für verschiedene Werte t ergeben sich verschiedene Hochpunkte.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Kurve y = h(x), die von der Menge dieser Hochpunkte gebildet wird. (2 Punkte)

(Physikalischer Hintergrund der Aufgabe: Die Funktion f_t beschreibt die Geschwindigkeitsverteilung von Luftmolekülen bei ihrer Braunschen Bewegung (nach J.C. Maxwell 1831-1879). f_t ist ein Mass für die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Molekül mit der Geschwindigkeit x bewegt. Der Verlauf der Kurve hängt von der Temperatur t ab.)

2. *Extremwertproblem*

Gegeben ist die Funktionsschar $f_a(x) = \dfrac{1}{(x+a)^2}$ mit $a \geq 0$.

Zwischen der x-Achse und dem Graphen von f_a wird ein gleichschenkliges Dreieck eingefügt. Die Grundlinie des Dreiecks liegt auf der x-Achse, wobei der linke Eckpunkt im Ursprung liegt und der rechte auf der positiven x-Achse im Punkt P(u|0), u > 0. Die Spitze des Dreiecks liegt auf dem Graphen von f.

a) Setzen Sie zuerst a = 1.
Zeichnen Sie die Situation für die Funktion $f_1(x)$ und den Punkt P(3|0). Berechnen Sie den Inhalt der Dreiecksfläche. (2 Punkte)

b) Betrachten Sie jetzt den allgemeinen Fall a > 0 und P(u/0) mit u > 0.
Zeigen Sie, dass für jedes a ein Dreieck mit extremalem Flächeninhalt existiert. Ist das Extremum ein Maximum oder ein Minimum?
Bestimmen Sie nun den extremalen Flächeninhalt in Abhängigkeit von a.
(5 Punkte)
Hinweis: Wenn Sie diese Teilaufgabe nicht allgemein lösen können, so wählen Sie a = 2. (2 Punkte)

c) Untersuchen Sie zum Schluss die Situation für a = 0. (3 Punkte)
Hinweis: Machen Sie deutlich, inwiefern sich diese Resultate von Teilaufgabe b) grundsätzlich unterscheiden.

3. *Zwei von einander unabhängige Vektorgeometrieaufgaben*

3.1 Gegeben sind die Punkte A(3|2|4) und B(4|4|-3).
Ein Modellflugzeug startet im Punkt A und fliegt geradlinig in die Richtung, die durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben ist.

a) Zeigen Sie, dass das Flugzeug senkrecht zur Verbindungslinie AB fliegt. (1 Punkt)

b) Ein zweites Flugzeug hebt in B in Richtung des Vektors $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ab.
Schneiden sich die Flugbahnen der beiden Flugzeuge?
Falls ja, geben Sie den Schnittpunkt an! (2 Punkte)

3.2 In der Wüste von Namibia wurden senkrechte Probebohrungen von den Punkten A(400|0|3), B(−50|500|7) und C(−200|−100|5) aus gemacht. In allen drei Fällen wurde Gold gefunden. Die nötigen Bohrtiefen betrugen t_a = 403 m, t_b = 257 m resp. t_c = 205 m.

Nehmen Sie an, die Goldfunde liegen alle in einer Ebene. Ebenso sei der Wüstenboden eine schiefe Ebene und durch die Punkte A, B und C gegeben.

Hinweis: Alle Koordinatenangaben sind in Metern. Die x-Achse zeigt nach Osten, die y-Achse nach Norden und die z-Achse nach oben.

a) In welchem Punkt S würde unter dieser Annahme Gold gefunden, wenn eine senkrechte Bohrung von P(0|200|z) aus gemacht würde? (2 Punkte)
b) Berechnen Sie den Winkel, den die Ebene mit den Goldfunden mit der (y,z)-Ebene einschliesst. (2 Punkte)
c) Finden Sie die Gleichung der Geraden, in der die Ebene mit den Goldfunden den Wüstenboden schneidet! (3 Punkte)

4. Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Bei einem Zufallsspiel wird ein normaler Würfel, dessen Seiten mit den Augenzahlen 1 bis 6 beschriftet sind, verwendet. Der Würfel wird sechs Mal geworfen.

a) Wie viele verschiedene Wurfbilder sind möglich, wenn die Reihenfolge der geworfenen Augenzahlen keine Rolle spielt? (1.5 Punkte)
b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei allen sechs Würfen die Augenzahlen grösser oder gleich 4 sind? (1.5 Punkte)
c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei genau einem der sechs Würfe die Augenzahl 6 geworfen wird? (2 Punkte)

Spieler A gewinnt, wenn mindestens drei Mal eine Zahl grösser oder gleich 4 geworfen wird. Sonst gewinnt Spieler B.

d) Zeigen Sie, dass dieses Spiel nicht fair ist.
Berechnen Sie dazu die Gewinnchancen von A und B. (3 Punkte)
e) Machen Sie nun das Spiel so fair als möglich, indem Sie die Anzahl der Würfe ändern. Die anderen Spielregeln sollen gleich bleiben. (2 Punkte)

5. Vektorgeometrie

Gegeben sind die Gleichungen der Kugel K_1 und der Ebene E sowie die Koordinaten der Punkte P und Q:

K_1: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 75 = 0$
E: $2x + 6y - 3z - 50 = 0$
P(5/4/-2) und Q(3/6/-2).

a) Bestimmen Sie den Mittelpunkt M_1 und den Radius r_1 der Kugel K_1. (1.5 Punkte)
b) Berechnen Sie den Abstand der Punkte P und Q von der Ebene E und geben Sie den Abstand des Punktes M(u/v/w) von der Ebene E als Term in den Variablen u,v,w an. (2.5 Punkte)
c) Bestimmen Sie den Mittelpunkt M(u/v/w) und den Radius r der Kugel K, welche die gegebene Kugel K_1 von innen berührt, durch die Punkte P und Q geht und E als Tangentialebene hat! (6 Punkte)

Hinweis: Beachten Sie die Resultate aus b) und entscheiden Sie dann, ob M im positiven oder negativen Halbraum bezüglich der HNF von E liegen muss!

Viel Erfolg
wünschen Ihnen
U. Dammer
M. Erdin
D. Fagan
C. Freiburghaus
M. Montero
R. Ugolini
und B. Zemp.

Lösungen (in Kurzform)

1. a) vgl. Grafik ($0 \le x \le 5$, $0 \le y \le 1.5$)

   b) $f'(x) = 0$ ergibt mit „zeros()"{0, √2, -√2}.

   Zur Anzeige wird der QuickTime™ Dekompressor „TIFF (Uncompressed)“ benötigt.

   $f''(\{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\})$ ergibt {2, −1.47, −1.47}

   HP(√2|2/e} oder (1.41|0.74)

   c) Breite 1.474

   d) $A = \int_0^\infty f(x)\,dx = 1.253$

   e) $2 \cdot A^2 \approx \pi$

   f) $f'(x) = 0$ ergibt mit „zeros()" {0, √(2t), −√(2t)} für $t \ge 0$, also der mittlere Wert.

   $f''(\sqrt{2t}) = -1.47 \cdot t^{2/3} < 0$, also Maximum.

   HP($\sqrt{2t}$|$2/e \cdot t^{5/3}$)

   Breite $2.136 \cdot \sqrt{t} - 0.662 \cdot \sqrt{t} = 1.474 \cdot \sqrt{t}$

   g) $x = \sqrt{2t}$, also $t = x^2/2$, $y = 2/e \cdot t^{5/3} = (\sqrt[3]{2} \cdot x^{10/3})/(2e) = 0.232 \cdot x^{10/3} = h(x)$

2. a) $A = 0.5 \cdot 3 \cdot 1/(1.5+1) = 0.6$

   b) $A_a(u) = 2u/(u+2a)^2$, $A'_a(u) = 0 \Rightarrow u = 2a$,

   $A''_a(2a) < 0$, also maximale Fläche, wenn $u = 2a$.

   Zur Anzeige wird der QuickTime™ Dekompressor „TIFF (Uncompressed)“ benötigt.

   $A(a) = 4a/(2a+2a)^2 = 1/4a$

   c) $A_a(u) = u/(u+2a)$, $A'_a(u) = 0 \Rightarrow a = 0$

   Mit $a = 0$: $A_0(u) = u/(u+2 \cdot 0) = 1$, also haben alle Dreiecke die gleiche Fläche.

   Mit $a \ne 0$: keine extremale Fläche. Weil $A'_a(u) > 0$ nimmt die Fläche mit wachsendem u zu.

3.1. a) Skalarprodukt $v \cdot AB = 0$.

   b) [3|2|4]+t·[5|1|1] = [4|4|−3]+u·[2|1|−2] ergibt mit „solve()" $t = -1$ und $u = -3$, also S(−2|1|3)

3.2. a) Goldebene G: $x+3z+800 = 0$, mit $x = 0$ und $y = 200$: $z = -800/3 = -267$ m

   b) $n_G = [1,0,3]$, $h = [1,0,0]$, Winkel dazwischen: $\cos(w) = 1/\sqrt{10} = 71.5°$, Neigungswinkel: 18.4°

   c) Wüstenebene W: $14x-15y+3450z-15950 = 0$

Schnittgerade g: $a_g = n_G \times n_W = [15,-1136,-5]$

Punkt P(0|0|z): $3z+800 = 0$, also $z = -800/3$, $-15y+3450\cdot(-800/3) = 15950$, also $y = -187190/3$

g: $r = [0,-187190/3,-800/3]+t\cdot[15,-1136,-5]$

4. a) Kombination mit Wiederholung.
   $\binom{6+6-1}{6} = \binom{11}{6} = 462$
   b) $(3/6)^6 = (1/2)^6 = 0.0156$
   c) $6\cdot(1/6)\cdot(5/6)^5 = 0.402$
   d) A gewinnt, wenn 3, 4, 5 oder 6 Mal eine Zahl grösser oder gleich 4 geworfen wird.
   $p_A = \binom{6}{3}\cdot(3/6)^3\cdot(3/6)^3 + \binom{6}{4}\cdot(3/6)^4\cdot(3/6)^2 + \binom{6}{5}\cdot(3/6)^5\cdot(3/6)^1 + \binom{6}{6}\cdot(3/6)^6\cdot(3/6)^0 = 0.656$
   $p_B = 1-0.656 = 0.344$
   e) Chance für A verkleinern, heisst die Zahl der Würfe verkleinern. Mit 5 Würfen:
   $p_A = \binom{5}{3}\cdot(3/6)^3\cdot(3/6)^2+\ldots+\binom{5}{5}\cdot(3/6)^5\cdot(3/6)^0 = 0.5$, d.h. perfekt!

5. a) Kugelgleichung auf Mittelpunktsform bringen, ergibt:
   K: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 75+1+4+1=81$
   Mittelpunktskoordinaten ablesen: M_1 (1/-2/1)
   Radius $r_1=9$

   b) HNF der Ebene E aufstellen $(2x+6y-3z-50)/7 = 0$
   Abstand von P zu E ergibt in HNF eingesetzt -10/7; d(P; E) = 10/7
   Abstand von Q zu E ergibt in HNF eingesetzt -2/7; d(Q; E) = 2/7
   Abstand von M(u/v/w) zu E ergibt in HNF eingesetzt
   d(M; E) = abs(2u+6v-3w-50)/7

   c) Ansatz für gesuchte Kugelgleichung K: $(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 = r^2$
   mit gesuchtem Mittelpunkt M(u/v/w) und gesuchtem Radius r
   (i) Koordinaten von P in Kugelgleichung: $(5-u)^2 + (4-v)^2 + (-2-w)^2 = r^2$
   (ii) Koordinaten von Q in Kugelgleichung: $(3-u)^2 + (6-v)^2 + (-2-w)^2 = r^2$
   (iii) K berührt K_1 von innen; $MM_1=9-r$, also: $(u-1)^2 + (v+2)^2 + (w-1)^2 = (9-r)^2$
   (iv) E ist Tangentialebene an K; d(M;E)=-r,also:(2u+6v-3w-50)/7 = -r
   (da alle Punkte der Kugel im negativen Halbraum der Ebene liegen!)
   Solve-Funktion für Gleichungssystem mit 4 Variablen ergibt

schliesslich nur noch eine mögliche Lösung:

K: $M(3/4/-2)$; $r = 2$