Gymnasium Liestal **Maturitätsprüfungen 2004**

Mathematik ***Klasse 4S***

Bemerkungen:	•	*Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden.*
	•	*Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt!*
	•	*Jede Aufgabe ergibt 10 Punkte, total sind 50 Punkte möglich.*
Hilfsmittel:	•	*Taschenrechner TI–89, TI–92 oder TI Voyage 200 mit gelöschtem Speicher.*
	•	*Anleitung zum Taschenrechner*
	•	*Formelsammlung*

---

1. *Kurvendiskussion*

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ für $x \geq 0$.

a) Skizzieren Sie den Graphen für $0 \leq x \leq 5$. (1 Punkt)

b) Bestimmen die rechnerisch die Lage des Hochpunkts und beschreiben Sie kurz, wie sie dabei vorgegangen sind. (2 Punkte)

c) Als „Breite eines Graphen" definieren wir die Differenz der x–Koordinaten der Wendepunkte. Bestimmen Sie die Breite des Graphen von f. (1.5 Punkte)

d) Bestimmen Sie den Inhalt der (ins Unendliche reichenden) Fläche, die vom Graphen von f und der x–Achse begrenzt wird. (1.5 Punkte)

Die Funktion f wird zur Schar $f_t(x) = x^2 \cdot t^{\frac{2}{3}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2t}}$ mit Parameter $t > 0$ verallgemeinert.

e) Berechnen Sie in Abhängigkeit von t:
- Den Hochpunkt (ohne Erklärung)
- Die Breite des Graphen (vgl. Aufgabe c), 2 Punkte)

f) Für verschiedene Werte von t ergeben sich verschiedene Hochpunkte.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Kurve, die von der Menge dieser Hochpunkte gebildet wird. (2 Punkte)

Physikalischer Hintergrund der Aufgabe: Die Funktion f_t beschreibt die Geschwindigkeitsverteilung von Luftmolekülen bei ihrer Braunschen Bewegung (nach J.C. Maxwell 1831–1879). f_t ist ein Mass für die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Molekül mit der Geschwindigkeit x bewegt. Der Verlauf der Kurve hängt von der Temperatur t ab.

2. *Extremwertproblem*

Gegeben ist die Funktionsschar $f_a(x) = \dfrac{1}{(x+a)^2}$ mit $a \geq 0$.

Zwischen der x–Achse und dem Graphen von f_a wird ein gleichschenkliges Dreieck eingefügt. Die Grundlinie des Dreiecks liegt auf der x–Achse, wobei der linke Eckpunkt im Ursprung liegt und der rechte auf der positiven x–Achse im Punkt $P(u|0)$, $u > 0$. Die Spitze des Dreiecks liegt auf dem Graphen von f.

a) Setzen Sie zuerst $a = 1$.
Zeichnen Sie die Situation für die Funktion $f_1(x)$ und den Punkt $P(3|0)$.
Berechnen Sie den Inhalt der Dreiecksfläche. (2 Punkte)

b) Sei jetzt $a > 0$.
Zeigen Sie, dass für jedes a ein Dreieck mit extremalem Flächeninhalt existiert.
Ist das Extremum ein Maximum oder ein Minimum?
Bestimmen Sie nun den extremalen Flächeninhalt in Abhängigkeit von a. (5 Punkte)
Hinweis: Wenn Sie die Aufgabe nicht allgemein lösen können, so wählen Sie a = 2. (2 Punkte)

c) Untersuchen Sie zum Schluss die Situation für $a = 0$. (3 Punkte)
Hinweis: Machen Sie deutlich, inwiefern sich die Resultate von Teilaufgabe b) grundsätzlich unterscheiden.

3. *Aufgabe zur Stochastik*

Bei einem Zufallsspiel wird ein normaler Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen 1 bis 6 beschriftet sind, verwendet. Der Würfel wird sechs Mal geworfen.

a) Wie viele verschiedene Wurfbilder sind möglich, wenn die Reihenfolge keine Rolle spielt? (1.5 Punkte)

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei allen sechs Würfen die Zahlen grösser oder gleich 4 sind? (1.5 Punkte)

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei genau einem der sechs Würfe eine 6 geworfen wird? (2 Punkte)

Spieler A gewinnt, wenn mindestens drei Mal eine Zahl grösser oder gleich 4 geworfen wird. Sonst gewinnt Spieler B.

d) Zeigen Sie, dass dieses Spiel nicht fair ist.
Berechnen Sie dazu die Gewinnchancen von A und B. (3 Punkte)

e) Machen Sie das Spiel so fair als möglich, indem Sie die Anzahl der Würfe ändern. Die anderen Spielregeln sollen gleich bleiben. (2 Punkte)

4. *Zwei von einander unabhängige Vektorgeometrieaufgaben*

4.1. Gegeben sind die Punkte A(3|2|4) und B(4|4|–3).
Ein Modellflugzeug startet im Punkt A und fliegt geradlinig in die Richtung, die durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben ist.

a) Zeigen Sie, dass das Flugzeug senkrecht zur Verbindungslinie AB fliegt. (1 Punkt)

b) Ein zweites Modellflugzeug hebt in B in Richtung des Vektors $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ab.
Schneiden sich die Flugbahnen der beiden Flugzeuge? (2 Punkte)
Falls ja, geben Sie den Schnittpunkt an!

4.2. In der Wüste von Namibia wurden senkrechte Probebohrungen von den Punkten A(400|0|3), B(–50|500|7) und C(–200|–100|5) aus gemacht. In allen drei Fällen wurde Gold gefunden. Die nötigen Bohrtiefen betrugen $t_a = 403$ m, $t_b = 257$ m resp. $t_c = 205$m.
Nehmen Sie an, die Goldfunde liegen alle in einer Ebene. Ebenso sei der Wüstenboden ganz eben und durch die Bohrpositionen gegeben.
Hinweis: Alle Koordinatenangaben sind in Metern. Die x–Achse zeigt nach Osten, die y–Achse nach Norden und die z–Achse nach oben.

a) In welchem Punkt würde unter dieser Annahme Gold gefunden, wenn eine senkrechte Bohrung von P(0|200|z) aus gemacht würde? (2 Punkte)

b) Geben Sie an, welchen Winkel die Ebene mit den Goldfunden mit der Horizontalen einschliesst. (2 Punkte)

c) Finden Sie die Gleichung der Linie, in der die Ebene mit den Goldfunden den Wüstenboden schneidet. (3 Punkte)

5. *Unabhängige Aufgaben aus verschiedenen Gebieten*

5.1. Zauberlehrling Harry hat eine Kiste mit unendlich vielen Bauklötzen in Würfelform. Der grösste Würfel hat eine Kantenlänge von 10 cm. Der jeweils nächst kleinere besitzt eine Kantenlänge, die um 20% geringer ist als sein Vorgänger. Von jeder Grösse gibt es nur einen Klotz.

a) Wie hoch ist der Turm, den Harry maximal bauen kann? (1.5 Punkte)

b) Die Klötze sollen versorgt werden.
Wie gross ist ihr gesamtes Volumen? (1.5 Punkte)

c) Wie viele Klötze sind nötig, um einen Turm zu bauen, der um höchstens 1 mm kleiner ist als der maximal mögliche? (2 Punkte)

5.2. Die Stadt A befindet sich an einer schnurgeraden Küste direkt am Meer. Die von A 10 km entfernte Stadt B liegt in einem schwer zugänglichen Gebiet 6 km vom Meer entfernt. Die Einwohner beider Städte vereinbaren, eine gemeinsame Meerwasser–Entsalzungsanlage in E direkt am Meer mit zwei geraden Zuführungsrohren der Länge a und b zu den Städten A und B zu bauen. Die Baukosten pro km nach A sind halb so gross wie diejenigen nach B.

a) Skizzieren Sie die Situation. (1 Punkt)

b) Wie sind die Strecken a und b zu wählen, sodass die Baukosten für die gesamte Pipeline möglichst gering sind? (4 Punkte)

Viel Erfolg wünscht Ihnen Manuel Erdin!