Gymnasium Liestal — Maturitätsprüfungen 2004

Mathematik — **Klasse 4LM**

Bemerkungen:	Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden.
	Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt!
Hilfsmittel:	Taschenrechner TI-89, TI-92 oder TI Voyage 200 mit gelöschtem Speicher.
	Anleitung zum Taschenrechner.
	Formelsammlung

Punkteverteilung:

1	2	3	4	5	Total
10	10	10	10	2+3+5	50

Aufgabe 1: Kurvendiskussion

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ für $x \geqslant 0$.

a) Skizzieren Sie den Graphen für $0 \leqslant x \leqslant 5$. (1 P.)

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Lage des Hochpunkts und beschreiben Sie kurz, wie Sie dabei vorgegangen sind. (2 P.)

c) Als *Breite der Kurve* definieren wir die Differenz der x-Koordinaten der Wendepunkte. Bestimmen Sie die Breite der Kurve. (1 P.)

d) Bestimmen Sie den Inhalt der (ins Unendliche reichenden) Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse begrenzt wird. (1 P.)

e) Finden Sie durch Probieren den Zusammenhang zwischen dem im Teil d) berechneten Flächeninhalt und der Zahl $\sqrt{\pi}$. (1 P.)

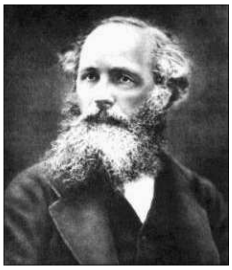
Die Funktion f wird zur Schar $f_t(x) = x^2 \cdot t^{\frac{2}{3}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2t}}$ mit dem Parameter $t > 0$ verallgemeinert.

f) Berechnen Sie in Abhängigkeit von t

- die Koordinaten des Hochpunkts (ohne Erklärung).
- die Breite der Kurve (vgl. Aufgabe c)). (2 P.)

g) Für verschiedene Werte von t ergeben sich verschiedenen Hochpunkte. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $y(x)$ der Kurve, die von der Menge dieser Hochpunkte gebildet wird. (2 P.)

Physikalischer Hintergrund der Aufgabe: Die Funktion f_t beschreibt die Geschwindigkeitsverteilung von Luftmolekülen bei ihrer Braun'schen Bewegung (nach J.C. Maxwell 1831-1879). f_t ist ein Mass für die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Molekül mit der Geschwindigkeit x bewegt. Der Verlauf der Kurve hängt von der Temperatur t ab.



Aufgabe 2: Vektorgeometrie

Gegeben ist die gerade Pyramide, deren Grundfläche das Quadrat $ABCD$ mit den Eckpunkten $A(0|0|0)$, $B(8|0|0)$ und $C(8|8|0)$ ist.
Die Spitze S der Pyramide liegt in der Ebene $E_1 : 3x - 5y + 2z = 16$.

a) Geben Sie die Koordinaten des fehlenden Eckpunktes D der Grundfläche an. (0.5 P.)

b) Berechnen Sie die Koordinaten der Spitze S der Pyramide. (2 P.)

c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden PQ mit $P(12|2|0)$ und $Q(2|6|6)$. (0.5 P.)

d) Die Gerade PQ schneidet den Mantel der Pyramide in zwei Punkten. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts G der Geraden PQ mit der Ebene E_2, die durch die Punkte C, D und S festgelegt ist. (2 P.)

e) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene E_3, die senkrecht zur xz-Ebene steht und durch die Punkte P und Q verläuft.
(Falls Sie diese Teilaufgabe nicht lösen können, rechnen Sie mit der falschen Ebene $E_3^* : x + z = 12$ weiter.) (1.5 P.)

f) Welchen Winkel α schliessen die Ebene E_3 und die xy-Ebene ein? (1.5 P.)

g) Die Ebene E_3 schneidet die Pyramide in einer Schnittfigur F. Berechnen Sie die Seitenlängen von F. Um welche Figur handelt es sich? (2 P.)

Aufgabe 3: Stochastik

Bei einem Zufallsspiel wird ein normaler Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen 1 bis 6 beschriftet sind, verwendet. Der Würfel wird sechs Mal geworfen.

a) Wie viele verschiedene Wurfbilder sind möglich, wenn die Reihenfolge keine Rolle spielt? (1.5 P.)

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei allen sechs Würfen die geworfenen Augenzahlen grösser oder gleich 4 sind? (1.5 P.)

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei genau einem der sechs Würfe eine 6 geworfen wird? (2 P.)

Spieler A gewinnt, wenn mindestens drei Mal eine Zahl grösser oder gleich 4 geworfen wird. Sonst gewinnt Spieler B.

d) Zeigen Sie, dass dieses Spiel nicht fair ist.
Berechnen Sie dazu die Gewinnchancen von A und B. (3 P.)

e) Machen Sie das Spiel so fair als möglich, indem Sie die Anzahl der Würfe ändern. Die anderen Spielregeln sollen gleich bleiben. (2 P.)

Aufgabe 4: Extremwertproblem

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$.

Zwischen x-Achse und Graphen wird ein gleichschenkliges Dreieck eingefügt. Die Basis des Dreiecks liegt auf der x-Achse, wobei der linke Eckpunkt R im Ursprung liegt und der rechte auf der positiven x-Achse im Punkt $P(u \mid 0), u > 0$.
Die Spitzen S sämtlicher Dreiecke liegen auf dem Graphen von f.

a) Zeichnen Sie die Situation für $P(3 \mid 0)$ in dem mitgelieferten Koordinatensystem. Berechnen Sie den Inhalt der Dreiecksfläche. (2 P.)

b) Berechnen Sie u, so dass das Dreieck RPS extremalen Flächeninhalt besitzt. Ist das Extremum ein Maximum oder ein Minimum? (2 P.)

Die Funktion f wird zur Funktionsschar $f_a(x) = \frac{1}{(x+a)^2}$ mit $a > 0$ erweitert.

c) Zeigen Sie, dass für jedes a ein Dreieck RPS mit extremalen Flächeninhalt existiert. Ist das Extremum ein Maximum oder ein Minimum? Bestimmen Sie nun den extremalen Flächeninhalt des Dreiecks in Abhängigkeit von a. (4 P.)

d) Untersuchen Sie die Situation für $a = 0$.
Hinweis: Machen Sie deutlich, inwiefern sich die Resultate von Teilaufgabe c) grundsätzlich unterscheiden. (2 P.)

Aufgabe 5: Kürzere, von einander unabhängige, Aufgaben aus verschiedenen Gebieten

a) Rotationsvolumen

Bei der Rotation des Graphen der Funktion $f(x) = (1-x)\sqrt{x}$ um die x-Achse entsteht ein tropfenförmiger Körper. Wie gross ist sein Volumen? (2 P.)

b) Vektorgeometrie

Berechnen Sie den Abstand d der windschiefen Geraden

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad h : \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$ (3 P.)

c) Exponential- und Logarithmusfunktionen

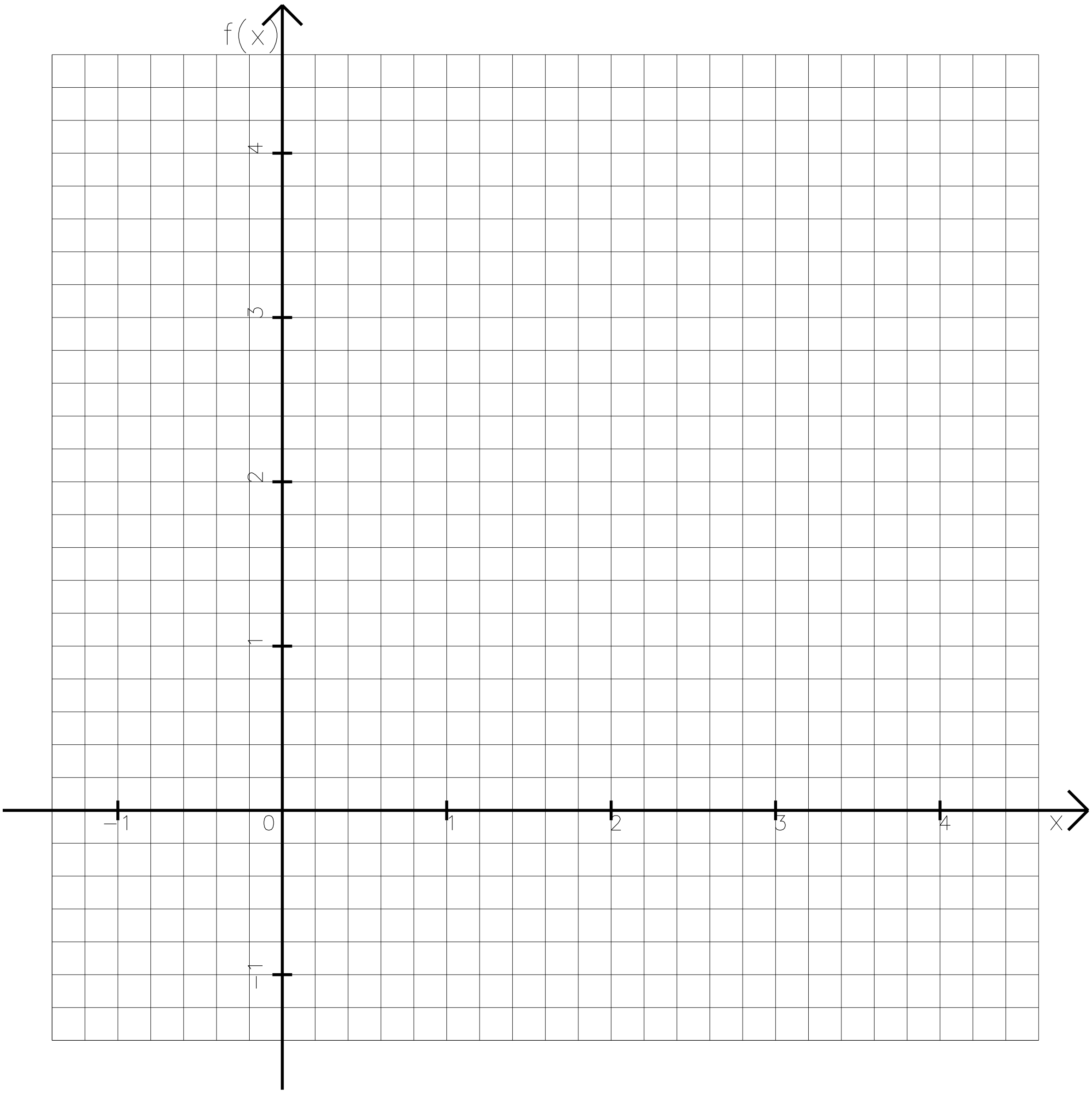
In lebenden Organismen besteht Kohlenstoff aus stabilen Atomkernen sowie, mit einem Anteil von $3.0 \cdot 10^{-10}$, aus radioaktiven Atomkernen ^{14}C, die durch kosmische Strahlung entstehen. Sobald ein organischer Stoff stirbt, nimmt der ^{14}C Anteil mit einer Halbwertszeit von 5736 Jahren exponentiell ab.

i) Geben Sie das Wachstumsgesetz des ^{14}C Anteils in der Form $B(t) = B(0) \cdot a^t$ an, wobei t die Zeit in Jahren bedeutet.
Berechnen Sie a auf 6 Nachkommastellen genau. (1.5 P.)

ii) Um wie viel Prozent nimmt der ^{14}C Anteil in 1000 Jahren ab? (1.5 P.)

iii) Im Jahre 1969 stellten Forscher in der Leinwand einer altägyptischen Königsmumie einen ^{14}C Anteil von $1.75 \cdot 10^{-10}$ fest. Datieren Sie die Mumie auf hundert Jahre genau. (2 P.)

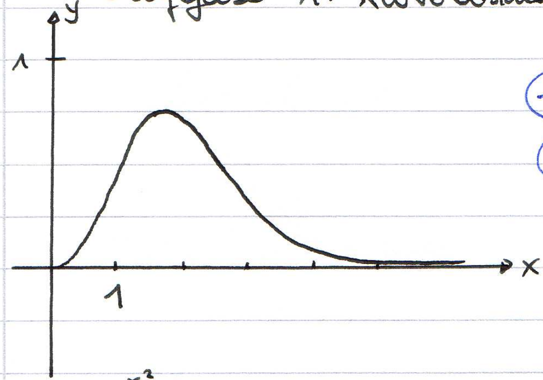
Viel Erfolg wünschen Ihnen Maria Montero, Christian Freiburghaus, Uli Dammer, Dorothy Fagan, Beat Zemp und Raphael Ugolini.


f(x)
4
3
2
1
−1
−1
0
1
2
3
4
x

Lösungen der Maturprüfung 2004

Aufgabe 1: Kurvendiskussion.

1a) 1P



$-1/2$ falls $f'(0) \neq 0$

$-1/2$ zu kleine Graphik

TR: $x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \mapsto y1(x)$

1b) 2P

TR: $\frac{d}{dx}(y1(x), x) \to y2(x)$

solve $(y2(x) = 0, x)$

Lösungen: $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$ $x_3 = 0$ 0,75 P $-0,5$ $x_1 \notin D$

TR: $\frac{d}{dx}(y2(x), x) \to y3(x)$

$y3(x_{\{1,2,3\}}) = \{-2e^{-2}, -2e^{-2}, 2\}$ 0,5 P

$\Rightarrow x_2 = 0$ Minimum

$x_3 = \sqrt{2}$ Maximum

$y1(x_3) = 2e^{-1}$ $H(1{,}41 / 0{,}74)$ $-0{,}25$ keine exakte Lösung

$\underline{\underline{H(\sqrt{2} / 2e^{-1})}}$

1c) 1P

$y3(x) = 0$ 0,25 $\Rightarrow x_1 = 2.135$ $x_2 = 0{,}6621$ 0,25

$\underline{\underline{b}} = x_1 - x_2 = \underline{\underline{1{,}4736}}$ 0,5

1d) 1P

$\underline{\underline{F}} = \int_0^\infty x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = \underline{\underline{1{,}25331}}$

1e) 1P

$\sqrt{\pi} : F = \sqrt{2}$

1f) 2P

$\underline{\underline{x = \sqrt{2t}}}$ $\underline{\underline{y = 2e^{-1} t^{5/3}}}$ $H(\sqrt{2t} / 2e^{-1} t^{5/3}$

$\underline{\underline{b = 1{,}474\sqrt{t}}}$

1g) 2P

$y(\sqrt{2t}) = 2e^{-1} t^{5/3}$ 1P

$x(t) = \sqrt{2t}$ $y(t) = 2e^{-1} t^{5/3}$

$t = \frac{x^2}{2}$ $\underline{\underline{y(x)}} = 2e^{-1} \frac{x^{10/3}}{2^{5/3}} = \underline{\underline{\frac{e^{-1} 2^{1/3} \cdot x^{10/3}}{2} = 0.232 \cdot x^{\frac{10}{3}}}}$

Aufgabe 2: Vektorgeometrie

0,5P a) $\underline{\underline{D(0|8|0)}}$

2P b) $M(4|4|0)$ 0,5P

$S(4|4|z_s)$ liegt auf E: $12 - 20 + 2z_s = 16$

$\underline{\underline{S(4|4|12)}}$ $z_s = 12$

0,5P c) $\underline{\underline{g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}}}$

2P d) $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$ 0,5 $\Rightarrow$ $\underline{\underline{E_2: 3y + z = 24}}$ 0,5

$E_2 \cap g$: $3(2 - 2t) + (-3t) = 24 \Rightarrow t = -2$ 0,5

$\underline{\underline{G(2|6|6)}}$ 0,5

1.5 e) $E_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 0.75 $\Rightarrow$ $\underline{\underline{E_3: 3x + 5z = 36}}$ 0.75

1.5 f) x-y-Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 0.5 $\Rightarrow$ $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}}{1 \cdot \sqrt{34}}$ 0.5 $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\alpha = 30.96^\circ}}$ 0.5

(falsche Ebene E_3^*: $\alpha = 45^\circ$)

2 g) $g_{AS}: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 0.25 $g_{AS} \cap E_3 = \underline{\underline{T(2|2|6)}}$ 0.25

$g_{BS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $g_{BS} \cap E_2 = \underline{\underline{U(7|1|3)}}$ 0.25

weitere Eckpunkte $\underline{\underline{V(7|7|3) \quad W(6|2|6)}}$ 0.25

$\left.\begin{array}{l} \underline{\underline{\overline{TU} = \overline{VW} = \sqrt{35}}} \\ \underline{\underline{\overline{UV} = 6 \; ; \; \overline{TW} = 4}} \end{array}\right\}$ 0.5 $\underline{\underline{\text{gerades Trapez}}}$

0.25 0.25

Aufgabe 3 : Stochastik

1.5 a) Kombination mit Wiederholung $\underline{\underline{\binom{6+6-1}{6} = 462}}$
für Variation mit W. 0.5P

1.5 b) $\left(\frac{3}{6}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \underline{\underline{0.0156}}$

2 c) $6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \underline{\underline{0.402}}$

3 d) $p_A = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^3 + \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^2 + \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{6}\right) +$
$\binom{6}{6} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^0 = \underline{\underline{0.656}}$

$p_B = 1 - p_A = \underline{\underline{0.344}}$

2 e) Chance für A verkleinern, heisst die Zahl der Würfe verkleinern. Mit $\underline{\underline{5}}$ Würfen
$\underline{\underline{p_A}} = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^3 \left(\frac{3}{6}\right)^2 + \ldots + \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^0 = \underline{\underline{0.5}}$ perfekt.

Aufgabe 4 : Extremwertproblem

2P a) Zeichnung 1P

$F = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (2{,}5)^{-2} = \frac{6}{25} = 0.24$ 1P

2P b) $F(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot \left(\frac{u}{2} + 1\right)^{-2}$

$F'(u) = 0 \Rightarrow u = 2$

$F(2) = \frac{1}{4}$

$F''(2) = -\frac{1}{32} \Rightarrow$ Maximum

4P c) $F(u) = \frac{1}{2} u \cdot \left(\frac{u}{2} + a\right)^{-2}$

$F'(u) = 0 \Rightarrow x = 2a$

$F''(2a) = -\frac{1}{32a^3} \Rightarrow$ Maximum

$F(2a) = \frac{1}{4a}$

2P d) $f_0(x) = \frac{1}{x^2}$ 0,5P für: Es existiert kein Maximum

$F(u) = \frac{2}{u}$

$F'(u) = -\frac{2}{u^2} \neq 0 \Rightarrow$ es existiert kein Extremalwert im Intervall $(0, \infty)$

Randwerte: $\lim\limits_{u \to 0} F(u) = \infty$

$\lim\limits_{u \to \infty} F(u) = 0$

Aufgabe 5: Kurze Aufgaben

2P a) $V = \pi \cdot \int_0^1 ((1-x)\sqrt{x})^2 dx = \frac{\pi}{12} = 0.2618$

Für Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ 0.5P

3P b) $E_g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{0.5}{\Rightarrow} E_g: x + 2y + 2z = 6$ 0.5

$P(5/-1/0) \in h$ 0.5

Hessesche Normalform: $\overset{0.5}{}$ $d(E;P) = \left| \frac{5-2-6}{\sqrt{9}} \right| = 1$ 1P

1.5 c) i) $B(5736) = \frac{1}{2}B(0) = B(0) \cdot a^{5736}$

$a = 0.999879$

$B(t) = 3{,}0 \cdot 10^{-10} \cdot 0{,}999879$ für $B(t) = B_0 \cdot 0{,}999879$ −0.5

1.5 ii) $a^{1000} = 0.886174$

$1 - a^{1000} = 11{,}3826\%$

2 iii) $\left.\begin{array}{l} B(t) = 1.75 \cdot 10^{-10} \\ B(t) = 3{,}0 \cdot 10^{-10} \cdot 0.999879^{t} \end{array}\right\} t = 4460{,}36$

$4460 - 1969 \approx 2500$ Um 2500 v. Chr.