Bemerkungen:
- *Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden.*
- *Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt!*

Hilfsmittel:
- *Taschenrechner TI–89, TI–92 oder Voyage 200 mit Kurzanleitung, ohne Funktionen oder Programme im Var-Link, Formelsammlung*

Punkteverteilung:

1	*2*	*3*	*4*	*5*	***Total***
1+1.5+1.5 +1+1+2+2	*2+4+4*	*1+2+2+1.5 +1.5+2*	*2+1.5+1.5 +2+2+1*	*1+2+4+3*	***5x10=50 Punkte***

Aufgabe 1: Kurvendiskussion

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ für $x \geq 0$.

a. Skizzieren Sie den Graph für $0 \leq x \leq 5$.
b. Bestimmen die rechnerisch die Koordinaten des Hochpunkts und beschreiben Sie kurz, wie sie dabei vorgegangen sind.
c. Als „Breite der Kurve“ definieren wir die Differenz der Wendestellen. Bestimmen Sie die Breite der Kurve.
d. Bestimmen Sie den Inhalt der (ins Unendliche reichenden) Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse begrenzt wird.
e. Finden Sie durch Probieren einen einfachen Zusammenhang zwischen dem im Teil d berechneten Flächeninhalt und der Zahl π oder der Zahl $\sqrt{\pi}$.

Die Funktion f wird zur Schar $f_t(x) = x^2 \cdot t^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$ mit Parameter t>0 verallgemeinert.

f. Gehen Sie für f_t analog zu Teil b. (ohne Erklärung) und c. vor.
g. Für verschiedene Werte t ergeben sich verschiedene Hochpunkte. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung y(x) der Kurve, die von der Menge dieser Hochpunkte gebildet wird.

Physikalischer Hintergrund der Aufgabe: Die Funktion f_t beschreibt die Geschwindigkeitsverteilung von Luftmolekülen bei ihrer Braun'schen Bewegung (nach J.C. Maxwell 1831-1879).f_t ist ein Mass für die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Molekül sich mit der Geschwindigkeit x bewegt. Der Verlauf der Kurve hängt von der Temperatur t ab.

Aufgabe 2: Extremalwert

Gegeben ist die Funktion f(x) = $\frac{1}{(x+a)^b}$ mit a > 0 und b = 1 oder b=2. Zwischen der positiven x–Achse und der Kurve wird ein Dreieck eingefügt. Die Grundlinie des Dreiecks liegt auf der x–Achse, wobei der linke Eckpunkt im Ursprung liegt und der rechte auf der positiven x–Achse im Punkt P(u|0), u > 0. Die Spitze des Dreiecks liegt auf dem Graphen von f so, dass ein gleichschenkliges Dreieck entsteht.

a. Zeichnen Sie die Situation für a = 1, b = 1 und u = 3. Berechnen Sie die Dreiecksfläche.
b. Nun ist b=2 und a > 0 beliebig. Wie gross ist die oben beschriebene Dreiecksfläche in Abhängigkeit von a und u? Für welches u wird diese Fläche extremal? Ist das Extremum ein Maximum oder ein Minimum? Bestimmen Sie die extremale Fläche in Abhängigkeit von a.
Hinweis: Wenn Sie diesen Aufgabenteil nicht allgemein lösen können, so wählen Sie a=2. (maximal 2 Punkte statt 4 Punkte)
c. Untersuchen Sie nun die Situation für b = 1. Machen Sie deutlich, inwiefern sich die Resultate von der letzten Teilaufgabe grundsätzlich unterscheiden.

Aufgabe 3: Vektorgeometrie

Ein Lichtstrahl g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ fällt von aussen auf die Mantelfläche eines verspiegelten, geraden Zylinders mit der Höhe h und dem Radius r und wird im Punkt S(-3/2/4) in die Richtung des Vektors $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ reflektiert. Der Punkt S befindet sich auf der Mantelfläche auf halber Körperhöhe. Die Symmetrieachse des Zylinders verläuft durch den Punkt A(6/8/13).

a) Zeigen Sie, dass der Punkt S auf dem Lichtstrahl liegt.
b) Wie gross ist der Winkel zwischen dem Strahl g und dem reflektierten Strahl?
c) Finden Sie einen Normalenvektor $\vec{n}$ im Punkt S, der senkrecht auf der Tangentialebene T des Zylinders steht und nach aussen zeigt.
   Hinweis*: Falls Sie die Aufgabe c nicht lösen konnten, arbeiten Sie mit dem Normalenvektor* $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ weiter.
d) Wie lautet die Koordinatengleichung der Tangentialebene T?
e) Berechnen Sie den Radius r des Zylinders.
f) *Falls Sie Teil e nicht lösen konnten, arbeiten Sie mit r =* $3\sqrt{6}$ *weiter.* Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts M des Zylinders. M befindet sich in der Mitte zwischen den beiden Deckflächen auf der Zylinderachse.

Aufgabe 4: Stochastik

Teil 1: Bei einem Zufallsspiel wird ein normaler Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen 1 bis 6 beschriftet sind, verwendet.
Der Würfel wird n = 6 Mal geworfen. Spieler A gewinnt, wenn mindestens m = 3 Mal eine Zahl grösser oder gleich p = 4 geworfen wird. Sonst gewinnt Spieler B.
a) Zeigen Sie, dass dieses Spiel nicht fair ist. Berechnen Sie dazu die Gewinnchancen von A und B.

In den beiden folgenden Teilaufgaben sollen Sie das Spiel so fair als möglich machen, d.h. die Gewinnchancen sollen für beide Spieler etwa gleich gross sein.
b) Verändern Sie die Zahl p. n und m sollen gleich wie in Teil a bleiben.
c) Verändern Sie die Zahl n der Anzahl Würfe. m und p sollen gleich wie in Teil a bleiben.

Teil 2: Im Roche Tennisclub haben 60% der männlichen und 50% der weiblichen Mitglieder einen Universitätsabschluss. Dies gilt auch für die Ehepaare im Club. Von den clubinternen Ehepaaren, bei denen die Frau einen Universitätsabschluss hat, haben sogar 11/12 der Ehemänner ebenfalls einen. Ein Ehepaar aus dem Club wird zufällig ausgewählt:

d) Stellen Sie die Situation in einer Vier-Felder-Tafel dar. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ehepartner über einen Universitätsabschluss verfügen etwa 46% beträgt. (genauer Wert?)
e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass keiner der Ehepartner über einen Universitätsabschluss verfügt?
f) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass nur ein Ehepartner über einen Universitätsabschluss verfügt?

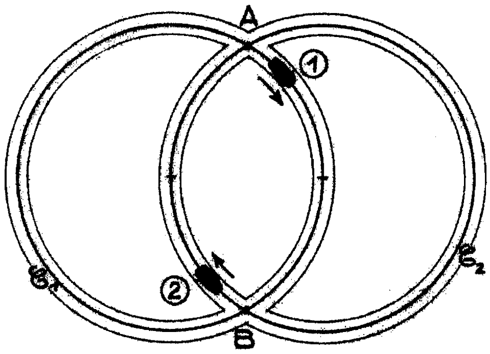
Aufgabe 5: Unabhängige Kurzaufgaben

a) Wir nehmen an, dass das Geburtsgewicht (ohne Kaiserschnitt) von Knaben im Schnitt 3.4 kg beträgt und normal verteilt mit einer Standardabweichung von 350g ist.

a_1) Skizzieren Sie von Hand die Verteilfunktion zwischen m=2kg und m=4kg.
a_2) Wie viel Prozent der neugeborenen Knaben sind bei der Geburt schwerer als 4 kg?

b) Ein Schiff fährt mit Kurs Süd 63° Ost (63° östlich der Südrichtung) und peilt einen Leuchtturm in genau südlicher Richtung an. Nach 2 km Fahrt peilt es denselben Turm unter dem Winkel Süd 20°West an. Wie weit ist es jetzt vom Leuchtturm entfernt?

c) Zwei kreisförmige Rennstrecken für (punktförmig gedachte) Spielzeugautos haben den gleichen Radius. Beide Rennstrecken verlaufen jeweils durch den Mittelpunkt der anderen und überkreuzen sich in A und B. Die zwei Autos bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit im Uhrzeigersinn. Wagen 1 benötigt pro Runde 1 min. 12 s während Wagen 2 1 min 15s benötigt. Zu Beginn passiert Wagen 1 gerade den Punkt A, als Wagen 2 gerade Punkt B passiert.



Nach welcher Zeit kommt es zum Zusammenstoss? Eine Lösung durch „Probieren“ ist erlaubt.

Viel Erfolg wünscht Ihnen U. Dammer